

信号与信息

胡来招 著

電子工業出版社.

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

信号与信息 / 胡来招著. —北京: 电子工业出版社, 2010.3

ISBN 978-7-121-10450-3

I. 信… II. 胡… III. ①信号处理②信息处理 IV. TN911.7 TP391

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 032028 号

责任编辑: 竺南直

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 850×1168 1/32 印张: 6.75 字数: 175 千字

印 次: 2010 年 3 月第 1 次印刷

印 数: 4000 册 定价: 19.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前言

由于研究电子对抗的技术问题，我开始考虑人们利用电子信号进行对抗的实质到底是什么，进而想归纳人们利用各种电子信号的活动到底有什么根本性的东西。结果发现在电子对抗这个领域内，我们对信号的利用效率非常低。于是，考虑把这方面的思考总结出来，或许不仅有益于电子对抗专业的发展，而且可能会使人们把电子信号与信息活动关联起来，进而推动产生创新的思维。

自从电被人类认识以来，它对人类的生活、生产、科研和军事等产生了巨大的作用，这甚至远远超出了人们最初的预期。人们利用电，可以分为两大类。一类是利用电本身所具有的能量，我们称之为强电。另一类则利用电信号能够携带、传递信息的能力，我们称之为弱电。从路的观点看，电具有一定的电压和电流，它们的乘积代表功率。从场的观点看，对应的是场强，表示场具有能量。电能可以由化学能和机械能等转换过来，同时又可以转换成其他形式的能量，被人们利用。由于电能具有传输方便的特点，使之成为一种很好的能量传输方式。电能与其他形式能量的转换装置、电能与电能的转换装置、电能的传输及控制装置就成为人们研究以强电形式使用电的主要内容。与其他形式的能量相比，我们知道，电能远距离传送时具有突出的优点，其速度是光速，其效率明显高于其他所有形式的能量。然而，仅仅利用电信号携带信息，把具有微弱能量的电信号作为信息的载体，给人类带来了更多的具体应用。由于人类的各种活动，无不与信息有关，我们把与信息有关的产业叫做信息产业。几乎所有的人都认识到，这个产业的发展太惊人了。

于是，我们不得不从根本上考虑，当我们把电看成信息的载体时，应当怎样看待信号与信息，我们可能用什么办法让信号承载信息，又可能用什么办法把信息从信号中提取出来。本书就是试图为解决这方面的问题而写的。

人类对信息最初并没有深刻的认识，甚至没有把信息当成一种客观实体，不认为信息可以计量，没有把信息当成我们研究的对象。自从香农确定信息理论的基础以来，事情发生了一些根本性的变化。首先，我们把信息定义为事件发生前后我们所掌握的熵的变化，这是一个与事件的概率大小有关的量，于是信息可以被计量。信息计量的具体定义为：如果一个事件发生为不同状态的概率为 p_i ，那么，在它确定发生以前，我们认为事件含有一定总量的熵，其度量可以被定义为 $I = -\sum p_i \cdot \log(p_i)$ 。而一旦它已经发生，就已经没有任何不确定性，熵的总量将下降到 0。因此，我们就把前者定义为事件的信息量。特别是，当我们用 2 作为对数的底时，所得到的信息量的计量单位为比特，即 $I = -\sum p_i \cdot \log_2(p_i)$ （比特）。由于有了这样一个对信息计量的定义，我们就可以具体地研究一个信号究竟包含多少信息、能够携带多少信息等。于是，我们又发现了信号与信息之间的一个最基本的关系，那就是携带一定量的信息，需要一定的信号功率、时间和频带宽度。本书将在第 2 章中详细论述这一点。既然发现了信号与信息的基本关系，我们想问，当利用信号携带信息时，是否也存在一些最基本的规律，从而使我们可能从根本上理解、解释、优化使用信号的过程。本书正是全面地论述了这个方面的考虑。希望它给读者带来启发，使我们可以自觉地、更好地使用信号，也可以让我们开发出新的应用方式和实际用途。

作者所以想写这本书，是受了很多思路的启发。比如说，人们研究了很多压缩信息的办法，这等于告诉人们，当信号用来携带信息时，我们往往没有有效地使用信号，因此，在功率、带宽或时间方面，有很多潜力可以挖掘。又比如说，GPS 采用扩谱信号，使得

信号处理可以有 50dB 以上的增益，实现接收机非常高的灵敏度。又比如说，采用合成孔径原理，从信号的时延和频移中提取目标反射的距离和速度信息，从而实现对目标的成像。所有这些，似乎告诉人们，信号与信息之间的关系，非常有意思，但是在人们构造一个具体的应用时，有些规律很可能并没有完全被认识清楚。如果我们能够从本质上看清问题，就有可能更有效地利用信号，并且开拓新的使用信号的途径。因此，书写本书在一定意义上也是一个学习和总结，或者说，本书力图从简单的、容易接受的一些事实出发，提出信号和信息之间最本质的关系。

要写一本专业技术书籍是很困难的。能够鼓励我继续思考，完成这个短作，是西南电子设备研究所这个群体。如果没有应用技术的发展对理论的需求，如果没有这个群体在自身的活动中对发展的渴望，根本就没有人向我提出需要考虑信号与信息的基本关系，也不可能有人支持我把这个问题想下去，因此也就不可能有这本书的诞生。尽管问题的提出不是直接的，但我认为这是技术发展的规律。所以，我还想大声地呼吁，很多技术问题还在等待着从事于技术开发、研究的人们去总结；我也想由衷地感谢，我们丰富的科研活动，它们是这些新观点的源泉。

初稿完成以后，重读一遍，发现有些地方不够严密，再由于时间的推移，觉得有些提法也不尽合理，于是不得不做稍大一点的修改。这样一来，这本小册子的完成就几乎经历了 7 个年头。同时，由于作者从事的是电子对抗专业，最初似乎是想总结侦察和干扰的基本理论，但是实际上，本书所论述的问题，显然并不局限于电子对抗，它可能带来的应用，或许会大大地超越电子对抗的范畴。

目 录

第 1 章 信号的描述	1
1.1 信号的基本描述	1
1.2 内积、投影和正交	5
1.3 信号的一般描述	11
1.4 对信号的变换	17
1.5 对信号的滤波和压缩	29
1.6 信号的双域描述	33
1.7 信号的统计描述	38
第 2 章 信号的信息能力	42
2.1 信息基础知识	42
2.2 信号的信息能力	44
2.3 获取信号能力的条件	48
2.4 通信状态下的信号能力	54
2.5 探测状态下的信号能力	60
第 3 章 信息的携带	71
3.1 发射信号时信息的携带	71
3.2 信号传输中信息的携带	90
3.3 多用途状态下信息的携带	103
第 4 章 信息的提取	108
4.1 对发射时携带信息的提取	108

4.2	对传输中携带的信息的提取	120
4.3	非配合信号样板的提取	135
第 5 章	若干应用问题讨论	142
5.1	最佳信号波形问题	142
5.2	通信信号波形分析	149
5.3	目标探测信号波形分析	159
5.4	信号发射时携带的源位置信息	170
5.5	关于应答方式的应用	178
5.6	接收机灵敏度	184
5.7	长时间相关积累的考虑	194
5.8	多次融合问题	200
5.9	关于信号波形安全	205

第 1 章 信号的描述

1.1 信号的基本描述

我们研究信号，首先想到怎样来描述一个信号。我们可以用电场、电压或电流等来表示信号。因此，一个最直接的答案是，我们可以把信号看成一个时间的函数，用一个函数式来描述信号，即 $s = f(t)$ 。如果信号是时间的某一个简单函数，我们可以用少数参数来描述这个信号。比如，一个单一频率的正弦信号可以用它的频率、幅度、初始相位等参数来描述，一个规律的重复脉冲信号可以用它的幅度、脉冲宽度和重复频率来描述，等等。更一般的情况是，信号具有某种看似随机变化的属性，我们似乎无法用有限的参数来准确地描述信号。但是事实并不是这样的，为了便于理解，首先从工程的观点出发进行简单分析。至于支持这个论述的更严格的说法，我们将在本章的后面分别讨论。

考虑一个信号，具有一定的时间长度 T 。由于它具有有限的时间长度，我们可以人为地以该长度为周期，复制该信号，并将其首尾相接。这样可以得到一个周期信号，其周期就是 T 。根据傅里叶级数的理论，这个信号将可以被展开成一个无穷级数，写成如下形式：

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos(k \frac{2\pi}{T} t) + B_k \cdot \sin(k \frac{2\pi}{T} t)] \quad (1.1)$$

也就是说，这个信号可以用一个直流和无数个简谐波来表示，而且这些简谐波的频率都是 $1/T$ 的整数倍。由于时间长度有限，这

个信号不含有非 $1/T$ 的整数倍的频率分量。如果信号的带宽是无限的，对信号的描述将仍然是无限的。

如果我们再添加一个条件，假设信号的带宽是有限的，其频带宽度为 B 。那么我们会发现，原来需要连续描述的信号，可以被转换成用一些离散的量来描述，而且它们的数量是有限的。因为这个信号已经被我们分解成有限个简谐波的总和。对于其中的任何一个频率分量，确切描述它所需要的仅仅是一个序号和它的幅度。我们不妨规定，直流分量的序号为 0，频率为 k/T 的余弦分量用正整数 k 表示，频率为 k/T 的正弦分量用负整数 $-k$ 表示。于是，一个这样的信号可以简单地用一系列的幅度值来描述。

也就是说，对于我们所设定的信号，不但其频率分量是离散的，而且具体频率落在给定的频率范围以外的那些分量，由于其幅度为零，我们根本不必描述。于是，一个信号将可以由有限个频率分量的幅度来描述。由于频率分量之间的频率间隔为 $1/T$ ，在带宽 B 内将有 $2B/(1/T)+1=2BT+1$ 个分量（包含直流分量可以被认为是一种很特殊的情况，与 $2BT$ 这样一个很规范的数相比，在分量的个数上的差距为 1）。上述分析的结论就是说，我们可以用 $2BT+1$ 个幅度值来描述一个信号， $2BT+1$ 个简谐波的总和就可以构成这个信号。用公式描述，就是

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=n_1}^{n_2} [A_k \cdot \cos(k \frac{2\pi}{T} t) + A_{-k} \cdot \sin(k \frac{2\pi}{T} t)] \quad (1.2)$$

$f(t) \leftrightarrow A_k$ 其中 k 的数量为 $2BT+1$ 个。

还可以换一个角度来分析这同一个问题。如果说信号具有有限的带宽，我们总可以把它变换到频率为 0 到 B 的另外一个信号。混频就是这样的一种线性变换，变换前后的信号具有一一对应的关系。因此，描述后一个信号也就描述了前一个信号。而对于后一个信号，著名的采样定理告诉我们，用频率为 $2B$ 的速率对信号采样，

所获得的信息可以唯一地描述这个信号。于是我们也可以用一系列离散的量来描述信号。由于信号的时间是有限的，描述信号的数也将只需要有限个。对于时间长度为 T 而言，需要的也就是用 $2BT+1$ 个幅度值来描述一个信号。我们用不同的分析方法得到了同样的结果。

如果说，用简谐波信号合成一个信号还让人觉得不是那么直观（尽管我们在前面已经用一个简单的级数对此进行了描述）。那么，用采样的观点，实际上就是用一批在本采样点幅度非零、而在其他所有采样点幅度均为零的信号合成一个信号。对于一个有限带宽的信号，假设信号频谱为 0 到 B ，如果再设所有频率分量的相位均为零，以及在时间为零时的幅度为 1，通过计算傅里叶反变换，可以得到这个基本的信号在时域内看为：

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \quad (1.3)$$

其波形如图 1.1 所示。把这个基本信号在时间轴上移动采样周期的整数倍，就成为 $g(t-k/2B)$ ，其中 k 可以是任意整数。这样，原信号就可以表示成这个基本信号在时间轴上移动后再乘以信号在采样点的幅度后的累加：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2B}\right) g\left(t - \frac{k}{2B}\right) \quad (1.4)$$

当信号的时间长度有限时，这个求和式自然只有有限项：

$$f(t) = \sum_{k=n_1}^{n_2} f\left(\frac{k}{2B}\right) g\left(t - \frac{k}{2B}\right) \quad (1.5)$$

$$f(t) \leftrightarrow f\left(\frac{k}{2B}\right) \quad \text{其中 } k \text{ 的数量正好为 } 2BT+1 \text{ 个。}$$

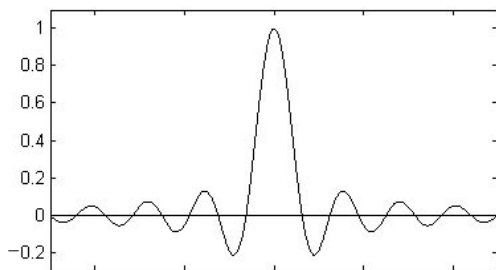


图 1.1 仅一个采样点为非零的有限带宽信号

在结束本节前，我们想申明一下，本节所论述的概念其实是包含有一定的近似的，这就是为什么我们在前面提到了让我们用工程的概念来分析。严格的数学分析告诉我们，任何一个信号，如果它是时间有限的，那它就不可能是频带有限的；反之，如果它是频带有限的，那它就不可能是时间有限的。我们为了陈述信号的描述，或者确切地说，为了获取信号可以被用有限的参数描述，从一开始就引入了一个近似，那就是信号既是时间有限，又是频带有限的。实际上，思维严谨的读者可能会提问，我们提到了数量 $2BT+1$ ，它与 $2BT$ 的差距为 1。如果要准确一点，到底是哪一个？其实问题还不仅仅是 1 的差别。当用前一种方式分解、描述信号时，我们假定了信号是周期存在的，这其实不同于在限定的时间以外没有信号，所以实际上信号在时间上并不是严格意义的被限定了的。对于后一种分解方式，我们从信号具有限定的频带宽度出发，但是后来又规定了信号具有有限的时间长度。观察在式 (1.3) 中给出的函数，就会发现，它不是一个时间有限的函数。如果强行在某一个时间段以外把它设定为零，那么信号的频带宽度将不再是严格意义被限定了的。这样的说明在一定意义上解释了两个数量的差别。好在对于一般的工程问题，我们有 $2BT \gg 1$ ，于是在工程上也就不计较这个不大的差别。或者说，当信号的时间带宽乘积比较大时，我们认为在规定的的时间和频率以外，信号的其他分量已经可以被认为不存在了。

或者说由于实际中总是存在着噪声，当被我们忽略的部分比噪声还小时，我们做这样的忽略不会引起概念上的差错。因此，作者将提醒读者，如果这两个有限的界限都非常小，或者说不满足 $2BT \ll 1$ ，这样的假设将可能是不合理的，我们的论述至少是不那么严格的。

1.2 内积、投影和正交

为了确切地分析对信号的描述，下面引入一些数学概念，它们是信号的内积和与内积有关的一些基本概念，包括投影、正交、距离等。有了这些基本概念，我们将可以把 1.1 节所提出的问题一般化，从而为更理性地阐述信号与信息的关系打下基础。

对于两个时间长度一样的信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ ，称积分

$$\int f(t)g(t) \cdot dt \quad (1.6)$$

为这两个信号的**内积**。如果信号已经表示为离散的，内积就是描述信号的各点的乘积之和

$$\sum_i f_i \cdot g_i \quad (1.7)$$

称信号自己与自己的内积的平方根为信号的**模**

$$|f| = \sqrt{f \cdot f} \quad (1.8)$$

显然，模是一个非负的量。我们可以把信号的模看成是对信号强度的一个度量。实际上，对于已经被离散描述的信号，我们也可以把它看成是一个 n 维的列矢量，模就是这个矢量的幅度。如果函数是信号的电压，那么，模的平方除以点数在一定程度上表示了信号的功率，或者更确切一点地说，是这个电压被施加在单位电阻上时所给出的功率。由于信号的点数是信号的时间长度乘以采样的频率，所以模的平方除以采样的频率在一定程度上也就代表了信号的能

量，如果不把采样频率当成一种变量，信号的模就代表了信号的能量。

我们在这里采用了一个说法，叫做“一定程度上”。如果想把问题说得确切一点，可以把这个说法理解为“成正比”。因为读者很容易发现，模的平方与功率或能量并不是同一个物理量纲的东西。如果我们有两个信号，它们的功率和能量相同，时间长度也相同，但是信号的频带宽度不同，结果描述信号的点数就不同，计算得到的模将会是不同的。

由于引入了这样的概念，根据著名的希瓦尔兹不等式：

$$\int f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int f^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int g^2(t)dt} \quad (1.9)$$

我们得到了内积的重要特性

$$\int f(t)g_1(t)dt \leq |f| \quad (1.10)$$

$$\text{其中} \quad g_1(t) = \frac{g(t)}{|g(t)|} \quad (1.11)$$

为归一化函数，我们把它称为方向函数。用语言描述，式(1.10)的意义就是，任何一个信号函数与任何一个方向函数的内积不会大于该信号函数的模。对离散表示的函数，这也是成立的，即

$$\sum_i f_i \cdot g_{1i} \leq |f| \quad (1.12)$$

这样，我们引入一个新的概念，称信号函数与一个方向函数的内积乘以该方向函数为原函数在该方向函数上的投影，记作 $f_g(t)$ 。上述不等式用语言描述，就是一个信号函数在任何方向函数上的投影的模不会大于自己的模。

于是，我们可以设想，是不是可以把信号看成是在一个高维空间内的量，在这个空间内，信号由很多基本的信号合成。事实上，

我们确实可以这样来理解一个信号。对于一个参考的方向函数，任何一个信号函数将可以被分解成两部分的和，即在参考的方向函数上的投影和剩余部分，这个剩余部分为

$$f_{\perp g}(t) = f(t) - f_{/g}(t) \quad (1.13)$$

很容易用投影的定义证明，这个新的分量在同一参考的方向函数上的投影为零。于是我们再引入一个概念，称这个分量与参考的方向函数**正交**。这也就是为什么我们引入了平行和垂直两个下标符号的理由。这样，对于一个参考的方向函数，任何一个信号函数都可以表示为在该方向函数上的投影和与该方向函数正交的另一个函数的和。当一个函数被分解成正交的两个函数的和时，根据定义，我们有

$$|f(t)|^2 = |f_{\perp g}(t) + f_{/g}(t)|^2 = |f_{\perp g}(t)|^2 + |f_{/g}(t)|^2 \quad (1.14)$$

于是

$$\begin{cases} |f(t)| \cdots |f_{\perp g}(t)| \\ |f(t)| \cdots |f_{/g}(t)| \end{cases} \quad (1.15)$$

即原函数的模不会小于它的任何一个正交分量函数的模。

我们似乎没有理由认为，与参考方向函数正交的函数只有一个形式。实际上，当我们用离散的方式表示函数时，正交给出了一个方程，即两个高维矢量的内积为零。这等于在原来多维的空间内引入了一个制约条件，使空间的维数减少。这样，我们可以做一个递推，在与第一个参考的方向函数正交的空间内，信号依然可以被分解，成为第二个方向函数上的分量和剩余部分的和。这样的分解可以进行下去，直到最后不能再分解为止。我们称这样的正交的方向函数的数量为信号的维数。

信号的维数无非是有限的和无限的两种。当信号表示为长度有限的离散形式时，它是一个长度为 n 的矢量。我们不可能构造出数

量比 n 更多的彼此独立的矢量。因此，在这样的信号空间内，我们最多也就只能构造 n 个正交的矢量。也就是说，对这样的信号，信号的维数一定是有限的。当信号是连续信号时，如果它的带宽是有限的，它一定可以用有限频率采样量化，表示成离散的信号。因此，只要假定信号的时间长度是有限的，它的维数也必定是有限的。或者更一般地说，对于本书所设定的时间、带宽有限的信号而言，信号维数总是有限的。

对于有限维的信号，我们可以递推式 (1.14)，也就是说，信号的模的平方为它的所有正交分量的模的平方和。于是，式 (1.15) 也得到推广，也就是说，不论分解成多少个正交的分量，一个信号的模不会小于它的任何一个正交分量函数的模。

一般说来，当我们把一个信号函数分解成任何两个函数的和时，不同信号函数的模之间有什么关系呢？如果我们在平面内画出一个矢量，这个矢量的模就是平面内这个矢量的长度。把它分解为两个矢量的和，我们在平面内就构成了一个三角形。几何原理告诉我们，两个分量的模的和不会小于总矢量的模。设信号

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (1.16)$$

$$\text{则 } \int f^2(t) \cdot dt = \int f_1^2(t) \cdot dt + \int f_2^2(t) \cdot dt + 2 \int f_1(t) f_2(t) \cdot dt \quad (1.17)$$

根据式 (1.9)，这个式子就是

$$|f(t)|^2, |f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 + 2|f_1(t)||f_2(t)| = [|f_1(t)| + |f_2(t)|]^2 \quad (1.18)$$

于是就得到了有名的三角形不等式

$$|f(t)|, |f_1(t)| + |f_2(t)| \quad (1.19)$$

它告诉我们，任何一个信号函数的模确实不大于它的两个分量函数的模的和。如果我们用离散的方式表示函数，这个性质同样是成立的。

当我们把一个函数分解成在参考的方向函数上的一个函数（其大小为 k ）与另一个函数的和时，即

$$f(t) = k \cdot f_{/g}(t) + f_2(t) \quad (1.20)$$

可以发现

$$|f_2(t)| = |f(t) - f_{/g}(t)| = |(1-k)f_{/g}(t) + f_{\perp g}(t)| \quad (1.21)$$

根据式 (1.15)，有

$$|f_2(t)| \cdots |f_{\perp g}(t)| \quad (1.22)$$

用语言描述，就是在所有可能的 $f_2(t)$ 中，原函数扣去它在参考的方向函数上的投影的那个分量具有一个特别的性质，就是它的模最小。因此，我们又称后者为原函数到参考的方向函数上的距离。

这一概念同样可以推广到多维，也就是说，一个函数可以被分解成在若干个正交的方向函数上的投影及剩余部分的和。如果我们在所有方向函数上的分量不等于在该方向函数上的投影，这个剩余部分将发生变化。在所有的剩余部分中，前一个的模是最小的，它是原函数到那几个正交的方向函数所构成的子空间的距离。

虽然一个信号可能有比较高的维数，但是我们在研究这个信号时，可能会用较低维数的信号来近似。如果对于所有正交的方向函数，我们把信号分解完毕，将这些分量的模按顺序排列，发现在若干维以后，其余所有维的模的平方和已经比较小了，那就意味着，信号到由前面那些方向函数所组成的子空间的距离比较小。或者说，信号很接近于它在前面那若干维中的投影的和。这样，我们将用那些数量比较少的正交的方向函数上的投影的和来代替原函数，于是信号的维数将被减少。这样的做法显然也可以被推广到具有无限维的信号空间，于是，一个真正的具有无限维的信号，在工程中实际上很可能被当成有限维的信号来处理。怎样减维和减维给我们

带来什么好处，将在本书后面给予探讨。

为了以后分解信号，或用不同的方式描述信号，在结束本节前，我们想指出一些特殊的正交函数。首先是，如果两个函数没有共同的非零区，根据定义，这两个函数显然是正交的。比如，两个不重叠的脉冲，或被脉冲调制的高频信号，必然是正交的；在离散函数中，所有跨度仅为一点的冲击函数，只要它们的位置不重叠，必然也都是相互正交的。其次，如果两个函数有一段共同的非零区，把这个区域看成一个对称区，如果这两个函数分别为这个对称区内的奇函数和偶函数，这两个函数也是正交的。比如说，仅由正 1 和负 1 构成的函数，对于重叠的部分，如果将它们划分成长度相等的段，对于其中一个函数，正 1 或负 1 的段数均为偶数，且在这样的区间内，另一个函数取正 1 和负 1 的段数正好相等，那这两个函数必然是正交的。其中一个特例就是哈尔小波。再次，如果两个函数的共同非零区具有周期性，对于其中的一个周期，把它看成一个对称区，这两个函数分别为奇函数和偶函数，那么，这两个函数也是正交的。比如，周期相同的正弦函数或余弦函数必然是正交的，周期相差一倍的正弦函数或余弦函数也必然是正交的。

运用这样的概念，我们有可能制造一组彼此正交的函数。比如说，以 n 维的矢量为例，所有只有一维的值为非零、且该非零维不在同一维的矢量，都是彼此正交的，它们共有 n 个。当 $n=km$ 时，顺序首尾相接、每一个具有 k 个连续的非零值的矢量，是彼此正交的，它们共有 m 个。如果 $k=2$ ，有两个占位相同的矢量，一个非零值为 $(1, 1)$ ，另一个为 $(-1, 1)$ ，于是这两个矢量是正交的（因为它们分别表现为奇、偶函数），在这种情况下，我们总共还是有 n 个彼此正交的矢量。如果 $k=4$ ，占位的 4 个非零值为 $(-1, 1, 1, 1)$ ，它与自身移 2 位也是正交的（因为重叠部分表现为像奇、偶函数），于是这两组矢量全是彼此正交的，它们共有 $2m=n/2$ 个。如果我们还有一个占位为 2 的矢量，但是我们还是把它设想为同样的 4 位，无论它们是 $(1, 1, 0, 0)$ ，或是 $(0, 0, -1, 1)$ ，它们当然与自

身移 2 位是正交的，它们总共也有 $n/2$ 个。这两组矢量又是彼此正交的，总共为 n 个。这样的规律显然可以推广。对于占位为 k 的矢量，如果 k 为偶数，记 i 为非零点的序号， $\sin(2\pi ij/k)$, $\cos(2\pi ij/m)$, $j=1\sim k/2-1$ 和 $\cos(\pi i)$ 及常数 1 共 k 个矢量是彼此正交的，它们移位 k 显然是彼此正交的，这样总共也有 n 个。读者可以构造自己认为对某个特殊应用更合适的正交函数组，我们甚至可以隐约地感觉，如果总数 n 是 2 的整次幂，这样的构造可能会容易一点。

1.3 信号的一般描述

在 1.1 节中，给出了两种特定的描述信号的方式，它们分别是在频域和时域内把信号分解成彼此“独立”的分量。根据 1.2 节的论述，我们很快可以发现，这两种描述实际上都给出了非常简单的、维数足够的正交的方向函数。由于使用了信号的频率分量幅度和时间离散采样点的幅度，这样来描述信号变得很容易理解。实际上，分解一个信号，从而用规范的方法来描述信号，并不一定要用这种要么在频域上完全无关的信号分量，要么是在时域上采样点处彼此不干扰的信号分量。我们可以把信号 $f(t)$ 看成为在抽象空间中的一个矢量，于是这个矢量就可以用它在不同形式的信号分量上的投影来描述，称这样的一套方向函数为信号坐标。一种最简单的状态是把信号描述成彼此正交的子函数的和。也就是说，一个高维的矢量是它在各个正交的方向函数上的投影的总和。用公式表示，就是

$$f(t) = \sum_k C_k \cdot f_k(t) \quad (1.23)$$

其中 C_k 为系数， $f_k(t)$ 是正交的方向函数，即满足彼此正交，模为 1，用公式标记，就是

$$\int f_k(t)f_j(t) \cdot dt \begin{cases} = 0 & j \neq k \\ = 1 & j = k \end{cases} \quad (1.24)$$

称这样的信号坐标为正交坐标。如果我们所给出的正交方向函数足够多，使我们所要研究的任何时间长度有限、频带宽度有限（或其他研究、分析特性具有一定制约）的信号都可以用它在这些方向函数上的投影分量来描述，就称这样的正交坐标为所研究信号的全维坐标。一旦有了全维坐标，任何一个信号都可以被分解成该坐标内彼此正交的这些方向函数上的分量的和。于是，一个信号，不论它是连续的，还是已经被离散化了的，都可以用 n 个数值来表示，它们就是信号在该全维坐标内彼此正交的方向函数上的投影的模，也就是式 (1.23) 中的 n 个系数，称 n 为这个全维坐标的维数。换句话说，一个信号可以被描述为 n 维空间内的一个列矩阵 \mathbf{C} ，我们把这个概念记成

$$f \leftrightarrow \mathbf{C}_f \quad (1.25)$$

这里，矩阵 \mathbf{C} 的下标 f 表示所对应的全维坐标内的方向函数的标记为 f 。

当我们用列矩阵描述信号时，不同信号的点积将是什么呢？根据式 (1.23) 和正交坐标内各方向函数的正交性，很容易得到

$$\int f(t)g(t) \cdot dt = \sum_i (C_i D_i) = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D} \quad (1.26)$$

其中 \mathbf{D} 为描述信号 $g(t)$ 的列矩阵。也就是说，信号之间的点积就是对应的两个列矩阵矢量的点乘。这样，如果两个信号正交，必定就是描述它们的两个列矩阵矢量正交。

设对于某一类信号，已经具备了一个全维坐标，其维数为 n 。在 1.1 节中，给出了两种可能的形式，它们可以描述时间、带宽有限的各种可能信号，其中一套是从频域内分解信号的，另一套是从时域内分解信号的。它们要么包含了频域内所有的点，要么包含了时域内所有的点，对应的全维坐标的维数都是 $n=2BT+1$ 。我们要探讨的是，如果我们采用了不同的信号坐标，所构造的全维坐标的维

数是否都相同？

假设另外还有一套信号坐标，其维数量为 m ，它也可以用来描述任意一个信号，不过它的所有方向函数不一定满足彼此完全正交。首先，我们可以对它们做一个顺序处理，构造对应的正交坐标：保留第一个方向函数；从第二个方向函数开始，把它分解表示成前面所有方向函数上的投影的线性组合和剩余的部分；如果没有剩余部分，就丢弃这样的方向函数（因为所有在这样的方向函数上的投影都可以被分解成前面其他方向函数上的投影的线性组合），如果还有剩余部分，就保留这样的子函数，构造新的方向函数。这样，我们就根据信号坐标构造了一个正交坐标，其维数必然不大于 m ，我们把它的维数记作 n' 。

现在，我们有了两套全维坐标，对于其中一套内的所有的方向函数，可以用另一套全维坐标的列矩阵矢量来描述，既然它们彼此正交，就有下列两个不等式

$$\begin{cases} n, n' \\ n', n \end{cases} \quad (1.27)$$

于是，只有一种可能的选择，那就是 $n'=n$ 。这表明，所有可能的全维坐标的维数必定是相同的。

实际上，我们可以用更一般的形式来分析。如果有一个信号函数，当它用第一套信号坐标来描述时，为一个 n 维的列矩阵 C ，其意义为式 (1.23)。而其中的每一个方向函数，又可以用第二套信号坐标，表示为 n' 维的列矩阵，它们的系数构成一个 n' 列 n 行的矩阵 A ，于是，如果 C_1 为用第二套信号坐标描述同一个信号的 n' 维的列矩阵，我们发现它就是矩阵 A 与 C 的乘积。同理，用第一套信号坐标表示第二套信号坐标内的每一个方向函数的矩阵是一个 n 列 n' 行的矩阵，可以记作 B ，我们又可以发现 C 就是 B 与 C_1 的乘积，即

$$C_1 = A \cdot C, \quad C = B \cdot C_1 \quad (1.28)$$

这给出了不同形式的信号描述之间的关系。如果这两套信号坐标都是正交坐标，也就是这两套全维坐标的所有方向函数，都是彼此正交的、且都是各自归一的，根据式 (1.26)，我们将得出结论说，无论是 \mathbf{A} 还是 \mathbf{B} ，它们都是各列彼此正交、且各列的模均为 1 的矩阵。于是，它们的转置矩阵与自身相乘，结果必须为单位矩阵。也就是说

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (1.29)$$

把这个结果代入到式 (1.28) 中，我们再次肯定了两个全维坐标的维数必然是相同的，并且两个表示方向函数的方阵之间的关系为

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \quad (1.30)$$

当我们用全维坐标描述一个信号时，由于各方向函数是正交的，对于任何一个方向函数，其他所有方向函数上的分量在这个方向函数上的投影均为零。因此，信号函数在这个方向函数上的投影就是在这个方向函数上的分量。我们分解信号函数，把它表示成一套列矩阵矢量的结果是唯一的，每一个分量的大小就是在对应的方向函数上的投影的模。但是，如果所采用的信号坐标不是正交坐标，那么，式 (1.28) 中的 $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_1$ 依然成立，其中 \mathbf{C} 是唯一的， \mathbf{B} 为 m 列 n 行矩阵，也是唯一的。矩阵理论告诉我们，如果我们用这个方程求解 \mathbf{C}_1 ，当 $m=n$ 时， \mathbf{C}_1 有唯一解；但是，如果 $m>n$ ，方程有无穷多解。这表明，当我们采用非正交的信号坐标，且坐标内的方向函数数量大于全维坐标的维数时，信号的表示不是唯一的。这也就是说，如果我们用维数更高的信号坐标表示全维坐标的方向函数时，虽然所得到的矩阵 \mathbf{A} 不是唯一的，但是，由于全维坐标的所有方向函数彼此正交、且各自归一，式 (1.29) 的第一个式子依然是成立的。

在工程中，我们经常会遇到这样的一种状态，信号是由某一个

样板函数要么在时域内经过各种可能的时延，要么在频域内经过各种可能的频移构成的，或者是由这样的成分的线性组合构成的，其他任何形式的内容都被视为噪声或干扰。我们称这样的样板函数为母函数。由于任何一个具体的母函数都是时间、带宽有限的，当时延和频移都有限度时，这样构成的信号当然是一个时间、带宽有限的信号。如果记母函数的时间、带宽分别为 T_m 、 B_m ，最大可能的时延范围和频移范围分别为 T_s 、 B_s ，那么

$$\begin{cases} T = T_m + T_s \\ B = B_m + B_s \end{cases} \quad (1.31)$$

既然我们规定了所定义的信号只能是母函数经过时延和频移后的线性组合，母函数经过时延和频移所形成的函数就可以被用作一套可以描述这样的信号的子函数，在归一处理后就成为一套信号坐标的方向函数。可以容易地计算出，这样给出的信号坐标内的方向函数的数量为

$$n' = n_B n_T = (2B_s T + 1)(2B T_s + 1) \quad (1.32)$$

一般说来，这个数并不等于 $2BT+1$ 。而且可以估计出，在很多情况下，这个数比 $2BT+1$ 大，在母函数不发生时延或不发生频移的情况下，这样构成的一套方向函数的数量等于 $2B_s T + 1$ 或 $2B T_s + 1$ ，它们肯定比 $2BT+1$ 小。也就是说，在后一种条件下，用信号来求解描述，答案才是唯一的。否则，对于一般情况，信号是由母函数经过一定的时延和一定的频移组合而成的情况，所构造的方向函数的数量很可能大于 $2BT+1$ 。这意味着，即使某一个特定的信号仅仅是由母函数经过一定量的时延和频移线性组合而成的，当我们用这样导出的一套方向函数来描述信号时，结果却很可能不是唯一的。也就是说如果我们想用这样的方式来求解原来的那些时延和频移，答案有可能是不能确定的。发生这个现象的原因其实很简单，当我们把

母函数进行延时和频移时,无法保证所得到的所有子函数都是彼此正交的。

然而,我们在工程中仍然乐于使用这样的描述。其原因很简单,如果把母函数的时延和频移当成信号所携带的信息,式(1.32)的数量 n' 一般比 n 大很多,从而使我们能够利用信号获取似乎比较多的信息。当然,这样做是要付出一定的代价的。如果使用一个全维坐标,其方向函数的数量就是 n ,我们分解信号,得到的信号描述是唯一的,而当使用 $n \times n$ 个方向函数时,这个唯一性被破坏了。我们分解信号的办法是把信号投影到各方向函数上去,前面已经说明,当子函数彼此正交时,任何一个方向函数上的分量在其他方向函数上的投影为零,使信号在某一个方向函数上的分量的大小与其他方向函数上的分量的大小没有关系,所以得到了唯一性。这就给了我们一种提示,观察部分的方向函数,如果它们在其他方向函数上的投影相对比较小,那么,在这些方向函数上的投影彼此接近独立,有可能这种描述仍然是工程可用的。比如说,我们可能不利用所有可能的时延和频移,而是把分辨率放宽,于是,总的方向函数的数量明显减少,可能比 n 大不了多少,甚至小于 n ,使得我们需要的接近正交的关系成立。也就是说,我们可能选择合适的 B_s 和 T_s ,使 n' 小于 $2BT+1$,我们在后面会给出这样的具体例子。

按照本节的观点,信号的一般描述几乎可以是任意的,我们已经习惯在时域内的描述和在频域内的描述仅仅是可能的两种描述而已。那么,是不是存在使用某种非常规的描述方式呢?这将取决于具体的应用。是不是存在比我们熟知的这两种描述更好的描述呢?这同样取决于与具体的应用。离开应用,我们将不能答复为什么要把一个看似连续的信号分解描述成一个维数非常高的矢量。不过前面的叙述实际上可以看成是对构造新的全维坐标的一种设想,也就是说,我们首先选择了一个母函数,然后利用一定限度的时移和频移,构造数量不是太多的一套方向函数,它们可能足以描述在

规定的时间、频率范围内的信号，只要将这一套方向函数适当地正交化，它就成了我们想要的结果。

1.4 对信号的变换

信号的自然状态是它的时间波形，也就是说，对于一个信号，在各种描述中，有一个默认的描述，这个描述就是 n 点时间上的幅度（假设信号是带限的，且采样所用的点的密度刚好满足对信号不失真采样的要求）。实际上，在这种情况下，我们采用了 n 个位置不同的冲击函数作为 1.3 节中所指出的一套彼此正交的方向函数。也就是说，一个信号可以被看成 n 点数据，或一个 n 维的列矢量。然而，正如我们在前面已经指出的那样，一个信号可以被表示成另外一些信号的组合，如果这种表示是唯一的，其数量必定也是 n ，它们的幅度是另外的 n 个数据。用公式表示，如果所用的两套方向函数都是全维坐标，也就是说，它们足以表示所有可能的信号，并记两个不同的表示为两个不同的具有 n 个元素的列向量 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} ，它们之间的关系就是

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \quad (1.33)$$

\mathbf{A} 是一个满秩的阵。实际上， \mathbf{A} 的每一行就是用其中的一个信号坐标的方向函数表示另一个信号坐标的每一个方向函数的系数。于是，我们发现，虽然 \mathbf{F} 与 \mathbf{G} 的样子不一样，但是，它们所反映的是一个完全等价的对象。不管它们是一些什么样的数，当我们手头有 \mathbf{G} 时，通过矩阵乘法，就可以得到 \mathbf{F} ；而反过来，只要已知 \mathbf{F} ，通过乘以 \mathbf{A} 的逆矩阵，就可以得到 \mathbf{G} 。于是，它们所包含的信息应该是完全一样的，只不过用不同的数据表示同样的一个对象而已。

为了研究、分析信号，我们称联系信号不同表示形式之间相互关系的这样一个乘满秩矩阵的过程为信号变换，称在信号变换中所使用的这个满秩矩阵为变换的关系矩阵，或仍然称为信号变换。在

1.3 节中已经指出, 矩阵 \mathbf{A} 具有一个特殊的性质, 它的转置矩阵就是它的逆矩阵。我们不妨推广信号变换的意义, 只要 \mathbf{A} 是一个满秩矩阵, 它就有逆, 信号的表示仅仅是改变了形式, 而不会改变它所包含的信息。因此, 一个满秩的矩阵就是一个信号变换。为了区别, 将给予一个全维坐标关联的信号变换一个特殊的名称。

在 1.3 节中已经指出, 信号的模就是它的描述的模。于是, 如果我们使用的是全维坐标, 对于两种不同的信号描述, 有

$$|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} = |\mathbf{G}|^2 \quad (1.34)$$

也就是说, 在经过信号变换后, 信号的模不发生变化。由于信号的模的平方所反映的是信号的总能量, 于是就得到了采用全维坐标作信号变换的一个重要性质: 信号的总能量不会因关系矩阵不同而发生改变。所以, 我们又称与全维坐标关联的信号变换为**保能量变换**。当我们关注信号的总能量时, 保能量变换是一种无增益、无损耗的变换。

根据 1.2 节最后所给出的一些准则, 很容易给出一些保能量信号变换的关系矩阵, 定义不同形式的保能量信号变换。这里的做法就是先构造一批彼此正交的行矩阵, 将各行归一, 就得到了信号变换的关系矩阵。或者用更一般的说法陈述, 对信号的所有形式的描述, 如果所采用的基信号或方向函数是彼此正交、各自归一的, 那么, 这些描述的各维的平方和将与具体的描述无关, 是恒定的, 它代表的就是信号的总能量。

首先我们发现, 不同周期的正、余弦函数是彼此正交的。于是, 当 n 为偶数时, 如果用 $\frac{\sin(ij2\pi/n)}{n/2}$ 、 $\frac{\cos(ij2\pi/n)}{n/2}$ 作为矩阵的各行, 其中 j 的取值为 1 到 n , i 取 1 到 $n/2$, 共 n 个行。其中 i 取 $n/2$ 时, 正弦部分为恒零, 是不能使用的, 取而代之, 用常数 $1/n$ 代替该行。这样, 就得到了一个 n 乘 n 的矩阵。显然, 这是一个正交、归一的

关系矩阵，它定义了一个保功率信号变换。其实，这个变换就是大家熟悉的傅里叶变换。

对于 n 点数据 s_i ，定义

$$f_k = \sum_{i=1}^n s_i \cdot \exp(2\pi \cdot j \cdot \frac{ik}{n}) \quad k=1,2,\dots,n \quad (1.35)$$

为它的离散傅里叶变换，其中 j 为单位纯虚数 $\sqrt{-1}$ 。用这样的数学式子表示时，公式很规范，但是变换后的结果却是复数形式的。由于一个复数具有实部和虚部两部分，似乎用更多的数来表示原来的信号。但是实际上不是这样的，由于三角函数的周期性

$$\exp(2\pi \cdot j \cdot \frac{ik}{n}) = \text{conj}\{\exp[2\pi \cdot j \cdot \frac{i(n-k)}{n}]\} \quad (1.36)$$

$$\text{导致} \quad f_k = \text{conj}[f_{(n-k)}] \quad (1.37)$$

也就是说，变换的结果，有一半可以由另外的一半导出，其实是没有信息含量的。或者，我们仅仅使用这一半的实部和虚部，结果为实数，但是数量仍然为 n 个。由于

$$\exp(x + j \cdot y) = \cos(x) + j \cdot \sin(x) \quad (1.38)$$

因此，变换确实就是把信号分解成正弦和余弦分量，其中零频的余弦分量也就是直流分量。

傅里叶变换是把信号作为一个全时间段的整体来看待的，它反映了信号变化的快慢，图 1.2 给出了一些变换所得到的分量的图形。比如说，在式 (1.35) 中，如果 $k=5$ ，表示在整个信号时间范围内变化为 5 个周期。也就是说，如果信号时间长度为 T ， $k=5$ 所对应的分量的信号频率为 $5/T$ 。由于用离散的方式分析有限时间长度的信号，上面所论述的复指数函数的性质告诉我们，当相对频率超过最高频率一半时，其效果就是负频率。由于傅里叶变换在这样的意

义下，是一种所谓稳态型的变换，容易理解，如果信号确实是在长时间内具有某个频率分量，那么用傅里叶变换分解和表示信号，将是非常有效的。但是同样也很容易理解，不是所有的信号都是这样的。如果信号的频率变化比较快速，或者在所分析的时间段内，仅仅只有一小段时间，信号可以被看成具有某种频率，那么，傅里叶变换应该不是一种有效的信号表示方式。为此，尽管傅里叶变换非常和谐，也非常有用，我们仍然需要考虑其他形式的信号变换或表示。不同的应用可能采纳不同的信号变换，可以说是我们论述信号描述所可能得到的重要启发。

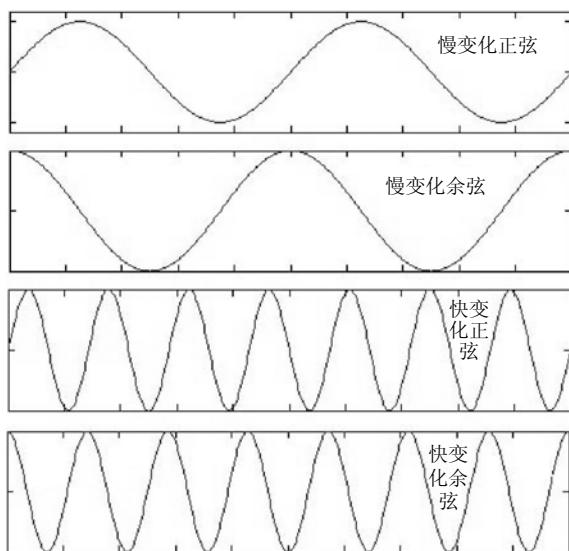


图 1.2 傅里叶变换的一些信号分量

对于 n 为 2 的某个整次幂的情况，可以用下面的方式生成矩阵的 n 行，构造一个正交归一的关系矩阵。首先，在矩阵的一行中，只有两个相邻的元素非零，顺序为正、负 $1/\sqrt{2}$ ，位置依次向一个方向错开 2 个元素放置，可以有 $n/2$ 个不同的行，它们彼此正交。

接下来, 将非零元素的占位扩大一倍, 即与这些行的某两个非零元素位置对应的为正 $1/\sqrt{4}$, 相临的两个元素为负 $1/\sqrt{4}$, 位置依次向一个方向错开 4 个元素, 可以有 $n/4$ 个不同的行, 它们自己彼此正交, 又与前面已有的所有行正交。如此递推, 最后, 将是一个有一半位置为正的 $1/\sqrt{n}$, 另一半位置为负的 $1/\sqrt{n}$ 的行, 还有一个是所有的位置均为正 (或负) 的 $1/\sqrt{n}$ 的行。它们也是彼此正交, 并与所有前面已经设置的行正交。这样总共是 n 行, 构成了一个 n 乘 n 的归一正交的关系矩阵, 它也定义了一个很有价值的信号变换。其实, 这就是有名的哈尔小波变换。

让我们首先从只有 2 点的信号开始, 它们的和的平均反映了信号固定不变的成分, 而它们的差反映了信号变化的成分。于是, 我们用 $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ 作为一个分量, $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ 作为另一个分量, 它们是归一、正交的。当信号具有 4 点时, 总时间被加长了一倍 (相对于所用的采样点的周期), 我们对应地把分量样板的时间拉长, 成为 $[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$ 和 $[1/2, 1/2, -1/2, -1/2]$ 。现在, 每一个小段的长度为 2, 显然可以按同样的思路往细发展。由于在长度为 2 的时间段内, 上一个层次的样本都是没有变化的, 相当于固定不变分量, 这样, 我们还需要反映变化的分量。由于出现在两个时间段内, 我们将需要构造两个这样的分量, 分别反映在两个时间位置的更快的变换, 它们将是 $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0]$ 和 $[0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ 。于是, 我们发现, 所谓哈尔小波实际上是一个反映信号固定和变化的表示, 变化越快, 所涉及的时间范围越小, 需要的分量也就越多。因此, 哈尔小波是一种多分辨率的信号分析或表示方式。对于 $n=2^m$ 的情况, 分解的结果是 $1+1+2+2^2+\cdots+2^{m-1}=2^m$ 个不同的信号分量, 正好与信号原来的点数相同。

由于哈尔小波变换是一种多分辨率变换, 就比较容易理解, 对于信号出现短时间比较快的变化的情况, 它是比较合适的一种表示。如果信号在整个时间段范围内, 稳定地或者不在范围的 2 分小

段内稳定不变或规则地交替, 将导致信号在变换后仍然出现在很多个信号分量上, 哈尔小波变换可能就不一定比傅里叶变换更优越。图 1.3 为若干哈尔小波的图形示例, 读者不难发现它与傅里叶变换的区别。

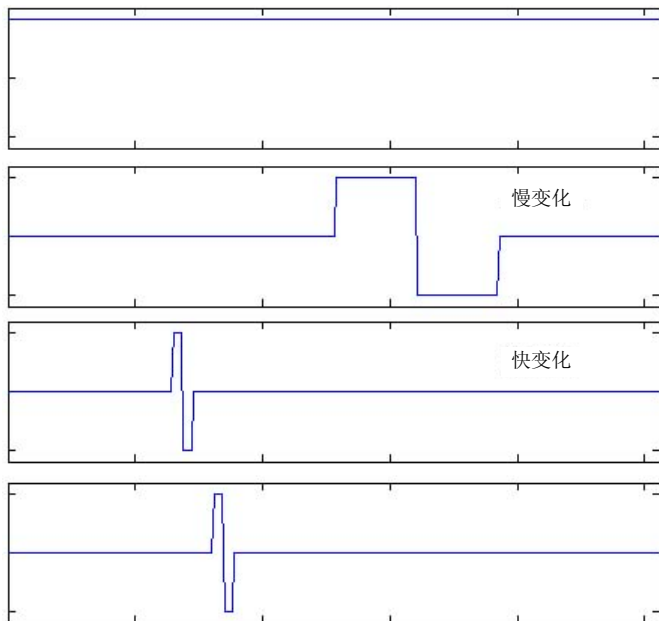


图 1.3 哈尔小波变换的一些信号分量

沃尔什函数的取值仅为正负 1, 由于与正、余弦函数类似的彼此正交的特性, 也可以用它构成归一、正交的关系矩阵。这个矩阵的第 i 行为与第 i 阶的沃尔什函数成比例的函数, 同时满足归一要求。设 K 为 0 到 2^m-1 的整数, 并且可以记成

$$K = \sum_{i=0}^{m-1} k_i \cdot 2^i \quad (1.39)$$

其中 k_i 仅取 0 或 1。 K 阶的沃尔什函数定义为:

$$\text{Wal}(K, x) = \prod_{i=0}^{m-1} \text{sign}[\cos(k_i \cdot 2^i \cdot \pi x)] \quad (1.40)$$

其中 x 为自变量，范围为 0 到 1， sign 为符号函数，取值为正负 1。部分沃尔什函数的波形如图 1.4 所示，可以看到它与傅里叶变换类似的是整个时间范围内的，与哈尔小波变换类似的是跳跃状的，但是它不是多分辨率型的。

引入沃尔什变换的原因之一是，由于该函数的值仅仅取正负 1 个单元，因此运算时面临的只有加减法，使变换的实际计算相当简单。

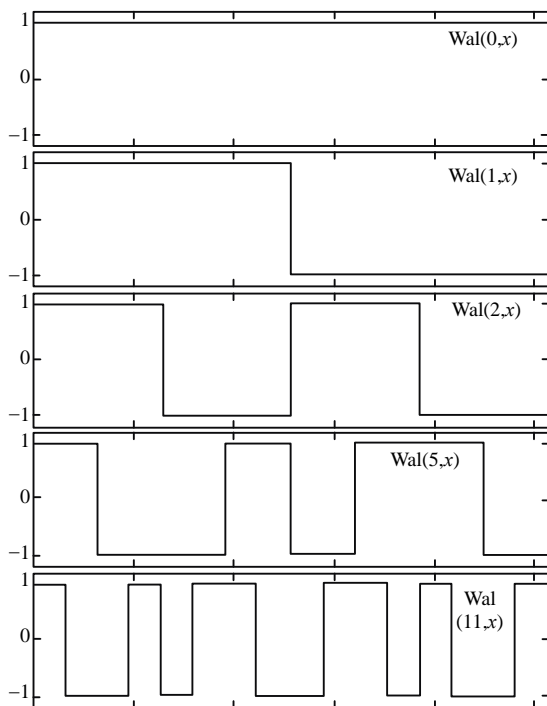


图 1.4 沃尔什变换的一些信号分量

有一个简单的规律，可以构建维数比较高的归一、正交的关系矩阵，制造新的保能量信号变换。把维数不一定需要相等的归一、正交的矩阵放在对角线位置上，组成一个更大的矩阵。它的各行依然是归一的，而且，由于彼此没有共同的非零区，它们也是彼此正交的。因此，这个构造的规模更大的矩阵也规定了一个保能量信号变换。

最简单的举例是分段的傅里叶变换。由于任何一段与其他段没有任何关系，变换满足上述要求。哈尔小波变换本身是多分辨率的，所以从很大意义上讲，是否分段仅仅是不同分量的排列顺序问题。然而，从分段的角度看，要求的将只是每一小段要满足信号点数是2的整次幂，段数可以任意，段的大小也不必一定全都相同。即使最高分辨率一样大，结果，整段信号的时间长度几乎可以成为任意点。从数学构造上讲，一旦对信号分段，就可以采用任何形式的变换分解和表示信号。但是，从具有实在的物理意义和后面所提及的合理的滤波功效，分段的分解和表示一般会采用同样的形式。也就是说，如果其中一段采用傅里叶变换，其目的是把信号表示成不同频率的分量，于是，所有段的分解将都采用傅里叶变换；而如果某一段采用小波变换，所有段也将都采用小波变换。

如果想把矩阵的某一行，在列的方向上做位置上的移动，成为所有其他的行，构建一个归一、正交的矩阵，这一行有什么特点呢？首先，它当然需要是归一的。其次，由于它们之间彼此正交，相当于把其中的一行与自己做相关，只有在时间为零处具有相关峰，而在其他任何位置，相关的结果都为零。要想使信号的自相关只有一个位置在零的峰，其傅里叶变换的幅度必须是一个常数。由于信号自相关的傅里叶变换是其傅里叶变换的模的平方，于是，如果我们把这样的一行看成为一个信号，它的傅里叶变换的模必须是一个常数。由于信号的傅里叶变换的相位可以任意选择，这样的信号可以有无穷多个。但是，如果把它分类，就只有两类。第一类只有一个，

就是其傅里叶变换的相位是频率的线性函数，结果信号为只在一个位置非零的冲击函数。第二类是相位不是频率的线性函数，结果信号不可能仅在总时间范围内的比较小的一段内非零。也就是说，信号将占据几乎全部时间范围。在这一类中，如果信号频谱的相位是随机均匀分布的，其特征将非常接近于一个白噪声，我们给它一个名称，叫 **H** 信号。**H** 信号具有与冲击信号一样的特性，就是，任何一个信号，都可以唯一地被表示成 **H** 信号被时延后的不同幅度大小的分量组成。

具体地说，**H** 信号是一类用离散方式表示的信号，如果对它做傅里叶变换，所得到的信号频谱满足以下条件：其频谱的幅度在所有谱线的位置上是一个常数；其频谱的相位是 360° 范围内的随机数，其统计规律为均匀分布，并且一定不是时间的线性函数。**H** 信号具有一些特别的性质，使它们在某些特殊的应用中有很好的使用价值。根据前面的推理，**H** 信号最重要的特性是，如果构造周期的 **H** 信号，其自相关函数在一个周期内只有一个非零点，相关没有任何栅瓣（一定注意，这仅仅是针对离散情况的！）。

H 信号的第二个特性是，如果信号的频率范围为 0 到 f_0 ，由下式定义的等效信号带宽将是 $\frac{f_0}{\sqrt{3}}$ 。

$$F = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |u(f)|^2 \cdot df}{\int_{-\infty}^{\infty} |u(f)|^2 \cdot df}} \quad (1.41)$$

其中 $|u(f)|$ 为信号在频率为 f 处的分量的幅度。这个结果很容易通过直接计算获得。

H 信号的第三个特性是，信号在时间范围内表现为一个分布在整个周期内的平稳的随机量，其幅度分布，在一个周期内的点数不是很小时，基本为正态分布。根据离散傅里叶变换的性质，我们清

楚，仅在时刻零为非零的时变函数的傅里叶变换为一平坦频谱，其所有分量为一实常数；函数在时间上的位移导致其傅里叶变换所有项的相位一个正比于频率的增量。于是，作为一一对应的关系，仅在一个时刻为非零的信号的频谱一定是平坦的，且其相位是频率的线性函数。反过来说， H 信号的频谱的相位不是频率的线性函数，也就不可能表现为在一个周期内只有一个时刻非零。由于信号是其频谱的傅里叶反变换，而所谓反变换，是把频谱的各分量看成在复平面内的一个矢量，按照不同的时间位置和频率，旋转相应的相位，然后叠加起来。频谱平坦的信号，这种叠加就是一批幅度相同的矢量的叠加。当这些矢量的相位准确地在 360 度范围内均匀分布时，把它们按照相位递增的次序画出来，就是一个封闭的正多边形；用语言描述，也就是它们叠加的和为零，这一点同样可以用三角函数的求和公式证明。当这些矢量的相位在 360 度范围内统计地呈均匀分布时，我们不能确保其和正好为零矢量，但是应当离零矢量比较接近。对于不同的时间，信号分量的相位无非是其频谱各分量的相位再加上由于频率不同引入的相移。如果把它看成随机变量，这个增量也是在 360 度范围内均匀分布的，这样，这些矢量的相位表现为在 720 度范围内呈三角分布，如果考虑到相位的有效变化范围就是 360 度，把这样的分布压缩到 360 度范围，它仍然是一种均匀分布。也就是说，统计地看，信号在不同的时间位置上具有相同的规律，是一个分布在整个周期内时间位置上的平稳的随机量。根据大数定理，当求和量的数量足够多时，这样求和的结果应该是一个呈正态分布的量。图 1.5 给出的是 H 信号的一段时域波形和对其幅度分布的一个统计。可以看到，其幅度分布相当接近于正态分布。这样， H 信号的特征非常接近于宽带的白噪声信号。

H 信号的第四个特性是，两个独立的 H 信号之间的互相关函数与信号本身具有相同的规律。根据与前面同样的分析，两个独立的 H 信号之间的互相关函数的频谱必定是平坦的，频谱的相位具有这

样的规律：它是两个在 360 度范围内均匀分布的随机数的差，表现为一个随机数，在 720 度范围内呈对称的三角分布；由于相位可以折合到一个 360 度范围内，结果相位的统计规律仍然还是均匀分布。也就是说， H 信号之间的互相关函数与其本身具有相同的频谱特征。于是对应的互相关函数是一个在时间上平稳的随机量，没有高耸的峰值。这个特性表明，在同时使用多个 H 信号时，它们彼此之间可以认为是一定意义上接近正交的（但没有理由被认为一定是正交的），基本没有相互干扰。

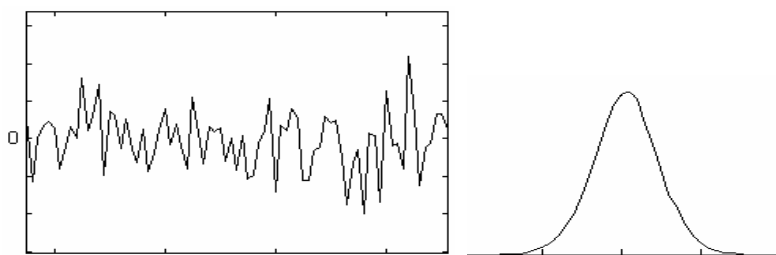


图 1.5 H 信号的时域波形和幅度统计规律

最后，根据同余法可以生成均匀分布的随机数，利用它计算在范围 0 到 c 之间均匀分布的离散数列的递推公式如下：

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \bmod c \quad (1.42)$$

对于相位，360 度的取模是一种做与不做效果都一样的运算。于是可以采用简单的线性运算办法得到在 360 度范围内均匀分布的相位。这样做的结果，一段时间长长的 H 信号将可以仅仅用四个参数来描述：首先是长度 n ，接着就是构造相位所使用的参数 a 和 b ，最后是产生随机相位所用的起始值。

H 信号是一大类信号，什么样的两个 H 信号是正交的呢？下面从分析一个更一般的问题开始考虑，如果一类信号可以用它的傅里叶变换表示为一系列三角函数的和，两个怎样的信号，会表现为正

交呢？把内积公式表示为求和，同时改变求和的顺序，有：

$$\begin{aligned}\sum_i f_i \cdot g_i &= \sum_i \left[\sum_j A_j \cos\left(\frac{j2\pi}{n}i + \varphi_j\right) \cdot \sum_j B_j \cos\left(\frac{j2\pi}{n}i + \beta_j\right) \right] \\ &= \sum_j A_j B_j \sum_i \cos\left(\frac{j2\pi}{n}i + \varphi_j\right) \cdot \cos\left(\frac{j2\pi}{n}i + \beta_j\right) \quad (1.43)\end{aligned}$$

利用三角函数的正交性，也就是说，不同三角函数的内积必然为零，上式就可以简化为

$$\sum_i f_i \cdot g_i = \sum_j \frac{n A_j B_j}{2} \cos(\phi_j - \beta_j) \quad (1.44)$$

对于 \mathbf{H} 信号而言，由于各频率分量的幅度相同，上式为零的条件就进一步简化为：

$$\sum_j \cos(\phi_j - \beta_j) = 0 \quad (1.45)$$

如果这些不同频率分量的相位差在 2π 范围内均布，这个和就为零。这里，不需要强制相位差的次序，也不在乎这个均布是否正好是分 n 份。如果我们企图构造 n 个彼此都正交的 \mathbf{H} 信号，一个办法就是让这个相位差是 2π 的 n 份的整数倍，也就是说，正好为 $\frac{2\pi}{n}ij$ 。

这样，我们就找到了一个非常规范的构造 n 个一整套彼此正交的 \mathbf{H} 信号的办法：任意规定一个频率分量的顺序和相位初始，把不同信号的这些频率分量的相位确定为 $\frac{2\pi}{n}ij$ ，其中 i 为频率分量的序号， j 为信号的序号。

这个构造办法的一个特例，如果我们把相位初始值规定为零，想构造的 \mathbf{H} 信号就不再是 \mathbf{H} 信号，而是蜕化为冲击信号；如果我们又把频率分量的顺序排成自然的频率上升的顺序，那么所构

造的一组信号就变成在时间上顺序后移的冲击信号。我们当然知道，这样的信号构成了一组彼此正交的、基本的方向函数。但是一旦脱离了这样的特殊性，我们构造的就是在时域上分布在整个范围内、在特性上不表现为彼此时延的一组函数。这可以说是我们引入 H 信号以建立人为的其他形式变换的一个相当规范的办法。

1.5 对信号的滤波和压缩

为什么我们要使用信号变换，把对信号的描述由一种形式改变成另一种形式？其实原因很简单，就是想改变信号所携带的信息的分布。当一个信号用 n 个数表示时，有用的信息可能被分布散开在所有的 n 个数中，如果经过某种变换，它被相对集中地分布在数量减少很多的 k 个数中，就可以将其余的 $n-k$ 个数强制地设置为零，而不至于损失多少信息。如果我们还需要信号在原来的描述中的状态，就可以将这个相当部分已经被设置为零的描述再变换回去。这样一个过程可以归纳为保留信号的有用或有效部分，去除信号的无用或无效部分，我们把它叫做滤波。注意，滤波不一定是滤除信号中的无用频率分量部分，它可以是滤除任何意义上的不需要的信号分量部分，或可以忽略的信号分量部分。

如果确认变换后所保留的有用部分的位置，一旦信号经过变换，我们关注的将仅仅是这些有用或有效的部分。于是，如果我们要传输、存储信号，将仅仅需要这一小部分，或者描述这一小部分的幅度信息，这就是数据或信号压缩的概念。因此，信号的变换有时也被用来对信号进行压缩。在压缩以后，如果我们仍然需要原来的信号，可以根据压缩的结果做反变换，还原出信号的时间波形，这个概念叫重构。我们将在后面给出滤波和压缩的一些具体例子，展示信号变换的应用价值。

虽然在 1.4 节中给出了一些经典的、或者说非常有用的变换实例，但是很显然，能够写出的变换远不止这些，其数量可以说是非

常巨大的。所以，为了理解滤波和压缩，最好还是通过举例来说明。

假设信号是一个频率固定、但未知的正弦波，其幅度被按照固定的单元调制成 0 或 1，这份调制反映了信号所携带的信息。假设信号频率范围为 $15\sim 45\text{MHz}$ ，使用的采样频率为 100MHz ，调制的单元宽度为 $5\mu\text{s}$ ，信号总时间长度为 $100\mu\text{s}$ 。在这种情况下，当用信号的时间波形表示信号时，需要 10000 点，但是最终代表的仅仅是 20bit 的信息。以信号峰值功率与噪声平均功率比为 -5dB 为例，图 1.6 的左图为含噪声的该信号的时间波形，右图为该信号的频谱幅度。作为参考，左上方的图形为信噪比足够大时的波形。

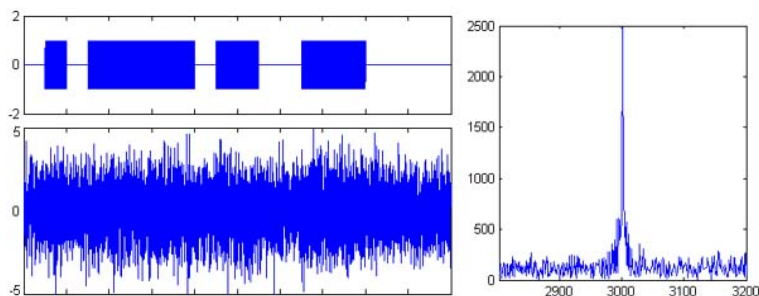


图 1.6 含噪的原信号波形和频谱幅度

如果分析信号的频谱，在没有噪声时，信号的大部分能量集中在大约 0.4 兆赫内，而且如果不受噪声干扰，相对于中心，频谱幅度呈偶对称、相位在扣去某常数后呈奇对称。于是，如果对信号做傅里叶变换，就可以根据变换后的结果，首先根据幅度的大小，求出某种意义的中心。然后，滤除离开中心超出 0.2 兆赫的成分，将它们强行设置为零。再将频谱按中心对折，按对称考虑，通过平均获取一定意义上对称的幅度和相位。这样记录的结果，将远远小于 10000 点，这就是滤波和压缩。

经过处理后的结果，如果再做反傅里叶变换，将还原出时间波形。图 1.7 的右图为压缩后的频谱幅度（没有画出相位），左图为重

构后的信号。为了便于比较，我们同样在图的左上方给出了信噪比足够高时的信号波形作为参考。对比图 1.7 和图 1.6，可以看到，在未滤波和压缩前，信号的包络已经看不到了，但是在经过滤波和压缩后，再重构这个信号时，包络变得比较分明。也就是说，滤波和压缩不但减少了数据的总量，而且大大提高了信噪比。

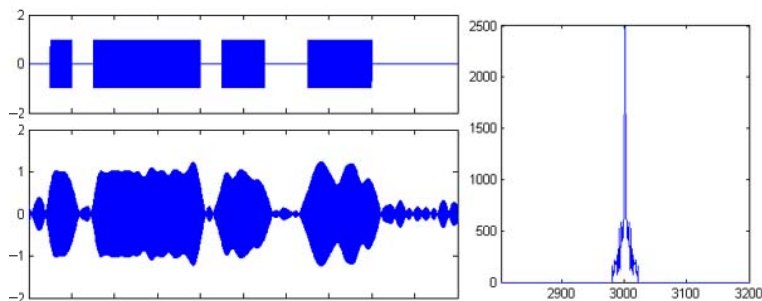


图 1.7 滤波压缩后的信号频谱和波形

傅里叶变换具有良好的频率滤波特性，但并不意味着在其他任何意义的滤波上，它就是最好的。如果信号包括很多突跳性的变化，哈尔小波变换和沃尔什变换往往会具有更好的效果。就以上面这个例子中的调制包络为例，已经看到，采用频率滤波，得到的结果包含冲击，实际方波的状态被失真，如果信噪比差一些，就存在无法正确辨认的可能。

设有一个 1024 点的方波调制波形，码元长度为 16，也就是有 64 个码元，含噪（信噪比 0 分贝）和不含噪的信号波形如图 1.8 的下图和上图所示。如果把它分别作傅里叶、哈尔小波、沃尔什变换，并且仅仅保留 1024 个分量中频率较低的 64 个分量，作为对信号的压缩，然后重构信号，其结果，傅里叶变换如图 1.9 所示，在现在的特定条件下，哈尔小波变换和沃尔什变换的结果是一样的，如图 1.10 所示。可以看到，与原始信号相比，后两种变换的效果要好得多，可以得到更接近原来信号的一种压缩后的还原。

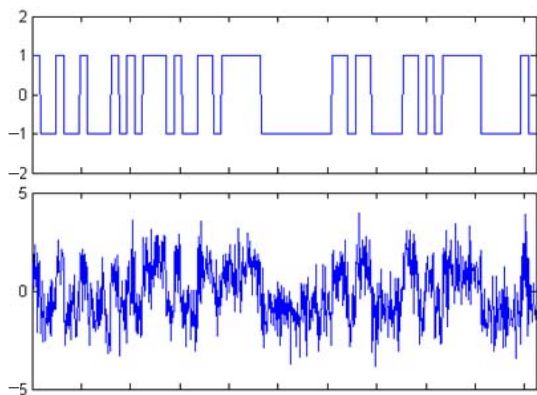


图 1.8 具有跳变的信号原始波形

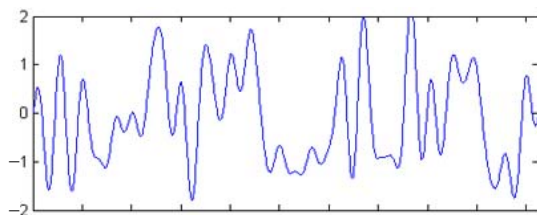


图 1.9 采用傅里叶变换压缩后的重构波形

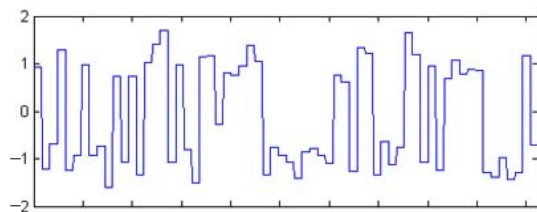


图 1.10 采用哈尔小波变换或沃尔什变换压缩后的重构波形

前面已经说明，可能的信号变换几乎有无数种，而这里所给出的例子又表明，不同变换的效果会有明显的差别。这个事实的逻辑结果就是，为了很好地获取信号中所携带的信息，在对信号的描述和对信号的变换、滤波、压缩、重构等方面，可能还可以有很多的研究工作可做。

1.6 信号的双域描述

用不同的方式描述信号，实际上是对信号的一种分析。因为在改变了描述方式后，信号的某些特性会变得更加分明，使我们对信号的了解更加清晰。本章前面的介绍中所给出的一些规范的变换，就是对信号在不同意义上的分析。这些分析的结果，信号都是在某一个域内被描述的，对于 n 点的信号，直接被另外 n 个数学或物理性质相同的数描述了。在本节中，我们还将提出一些把这样的特性域内的信号变换成双域内的数据描述的例子，它们是对信号的又一种分析，但自然也是信号的又一类描述方式。双域的高维描述似乎把问题由简单变得复杂，但是实际上，由于更多的域数的信号描述在不少场合下有可能更清楚地反映信号的实质，我们在不少时候仍然采用这种看似化简为繁的方式。

一种数学结构简单的双域的变换由分段的变换构成，让我们以傅里叶变换为例来说明。对于长度为 $n=n_1 \cdot n_2$ 的信号时间波形，对各长度为 n_1 的小段，采用傅里叶变换，把它变成频域内的表示。而这样的表示随着时间的推进，一共有 n_2 个，它们构成在频域和时域两维的结果。这个结果在频域内有 n_1 点，在时域内有 n_2 点。实际上，它就是分时的短时傅里叶变换，把结果描述在一个两维坐标上，就成为我们所要的结果。

注意，尽管采用了双域的方式来描述信号，我们所得到的数据仍然是 n 个，变换前后的信号仍然可能是一一对应的。很容易理解，以任何方式重新排列双域的描述，得到一个单域的高维结果，我们又可以回复到前面已经陈述过的一般描述。因此，双域的变换同样可以用一个矩阵来描述。只要这个矩阵是满秩的（不同的排列是对矩阵的一个初等变换，不会改变矩阵是否满秩），变换就是一一对应的。一旦双域所用的数据量的总数，也就是两个域各自维数的乘积大于原来的信号维数，描述变换的矩阵将是一个行数和列数不相

等的矩阵，它的秩不会大于其中较小的那个维数。这表明，这样的变换可能不是一一对应的。但是，本节后面的论述表明，这样的描述可能也是需要的，存在工程使用的价值。

在用单域的高维来描述一个信号时，我们可以说，这样的信号可以具有任意的形式。比如说，在时域内看，信号可能仅在一个时间存在，也可能在所有的时间存在。同样地，在频域内看，它也可以仅在一个频点存在，也可能铺满整个频带。因为信号的各维是独立的，我们不能排斥各维任意取值的可能性。当用两个不同的域内的数据来描述信号时，情况似乎是同样的。但是，如果我们试图提高分析的分辨率，也就是说，通过双域，增加了信号描述的总的维数，情况将是什么样的呢？一旦两个域具有确定的物理意义，情况将不同于单域的描述，这两个域的不同的维可能彼此发生了影响。让我们仍以用短时傅里叶变换构造的频域、时域的信号描述来说明。如果只在一个时间段内具有单一载频的信号，在变换后，将仅仅在一个时间点上非零，也仅仅在这个时间位置上的一个频率点非零。信号似乎只占据两个不同的域所构造的高维空间内的一个点。但是实际上，这个信号从整体上看，将既不是具有单一载频的信号，也不是一个只占据极短时间的信号。由于频率的量值是时间的倒数，我们似乎不可能得到短时、单频的信号。事实正是这样，在我们所面对的整个时间范围看，信号总是具有某个长度，它的傅里叶变换也一定具有某个宽度，从而使这个信号的时间和频率宽度的乘积存在一个下限。

信号的不确定性确切地说明了这个问题。如果我们采用下一节定义的信号的时间宽度 ΔT 和频率宽度 ΔF ，也就是

$$\Delta T = \sqrt{\int (t - t_0)^2 |s(t)|^2 \cdot dt}, \quad \Delta F = \sqrt{\int (f - f_0)^2 |S(\omega)|^2 \cdot d\omega} \quad (1.46)$$

其中 $S(\omega)$ 为时域信号 $s(t)$ 的频谱，它们都是在强度上已经被归一了的。而所谓不确定性是下列确定的不等式

$$2\pi\Delta F \cdot \Delta T \cdots \frac{1}{2} \quad (1.47)$$

我们并不打算在这里给出该式的严格数学证明，但是其证明的基本思路是：

1) 首先把信号在时域上平移到均值为零处，把信号频率在频域内平移到均值为零处，于是式(1.46)中的均值部分不再存在；

2) 利用等式：

$$\int \omega^2 |S(\omega)|^2 \cdot d\omega = \int |s'(t)|^2 \cdot dt \quad (1.48)$$

和著名的施瓦尔兹不等式：

$$\int |f(x)|^2 \cdot dx \cdot \int |g(x)|^2 \cdot dx \cdots \left| \int f^*(x)g(x) \cdot dx \right|^2 \quad (1.49)$$

3) 考虑到不等式：

$$\left| \int ts^*(t)s'(t) \cdot dt \right|^2 = \left| -\frac{1}{2} + j\text{Cov}_{\text{so}} \right|^2 \cdots \frac{1}{4} \quad (1.50)$$

其中 Cov 的意义是协方差。这样，当我们观察在双域内描述的信号的图形时，一般会发现信号呈现为具有一定面积的图案。另一方面，就以短时傅里叶变换所构造的两维图形为例，如果原始的采样频率为 f_s ，截取的短时段长度为 n_1 点，就会发现，这样的两维描述，在时间维上的分辨率为 n_1/f_s ，而在频率维上的分辨率为 f_s/n_1 ，它们的乘积为 1。我们无法获取更高的分辨率！

实际上，如果采用短时傅里叶分析，信号在变换成它的时频分析后，在时域上的分辨率降低了，换取了在频域上有一定的分辨率。调整 n_1 和 n_2 的大小，将可以改变其中一个的分辨率大小。但是，作为我们使用分析时的一个愿望，还是希望在两个不同的域内的分辨率都能够提高一些。如果我们实现了这样的效果，那么，原来描

述信号的 n 维矢量，将被增加到一个更高的维数，成为更高维空间内的一个矢量。一个合理的解释是，由于这更多维的矢量不能占据与那么多维对应的整个更高维的空间，它们之间彼此不独立。换句话说，在这样的时频空间内，某些点的高峰必然会拉扯上临近点的另外一些小一点的峰。但是从形式上获取高一点的分辨率，并非一定是不可能的。

下面给出一些例子。图 1.11 的上图是一个信号的时域波形，不容易看清楚。而该图的下面是它的频谱波形，似乎反映了一定的问题。实际上，这个信号是一个连续的调频信号，副载波是正弦波，再叠加了一小段时间范围的固定频率信号、线性调频信号和宽带噪声信号。

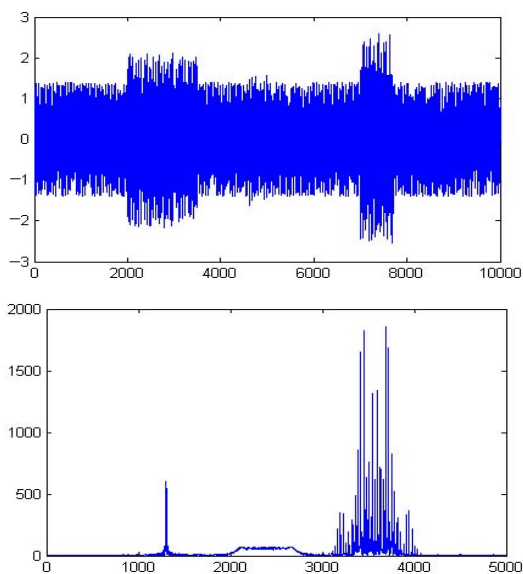


图 1.11 信号的时域波形和频谱表示

图 1.12 的上图是其常规的短时傅里叶变换，所画出的是一个等高线图，它在一定意义上反映了这么一个情况，但还是不够清楚，

因为其分辨率不够高。现在，我们对变换作一点改动，提高分段的长度，于是频率分辨率提高；同时在分段移动时，采取仅仅移动该段的一部分，于是在时域内的点数仍然比较多，使时域的分辨率也得到提高，或者至少没有降低。这样做得到了两个分辨单元的数量的乘积比原信号的时频乘积大的效果。但是，现在我们所得到的结果，在时间上有明显的重复。为了尽量减少这个意义的重叠，我们对每一段信号加一个权窗，由于小段的时间长度比较长，频率分辨率被保留了。这个窗口的形状如图 1.13 所示，我们所得到的信号频谱，主要是中间段的，使重叠有一定程度的减少。这样的结果，时频分析如图 1.12 的下图所示。可以看到，这个结果似乎确实更能反映信号由四部分组成，而且比较清楚地看到了调频信号的频率。

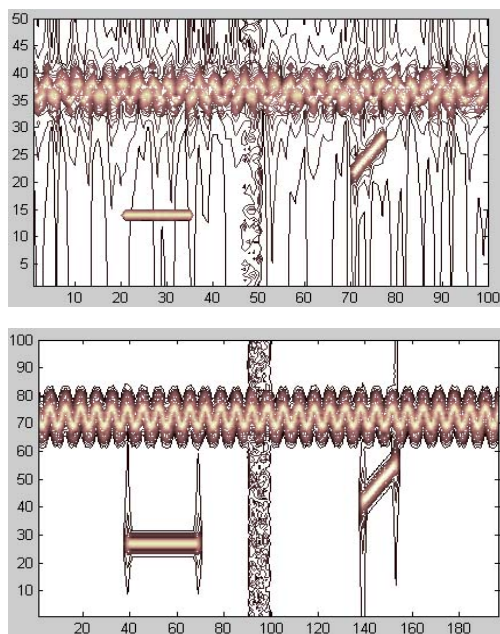


图 1.12 信号的标准时频分析和变形后的时频分析

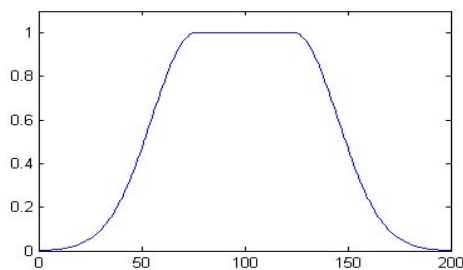


图 1.13 提高分辨率所用的窗口权函数

到目前为止，我们尚不能非常有效地论述采用两个不同的域描述信号的一般形式。但是，上面这个例子给出了一个基本的思路，采用一定形式的窗和分析时的适度重叠，可以在两个域内获得形式上维数被增加的信号描述，这样的描述在某些时候可以让我们更清楚信号的组成或特性。

1.7 信号的统计描述

当考虑用信号携带信息时，总是面对不确定性，在获取信号后不确定性的减少反映了信息，因此，我们也需要考虑用统计的方式描述信号。或者换句话说，当我们对信号一无所知时，无法用一个确定的矢量描述信号时，信号是不是还有一些统计意义上确定的东西。有的时候，我们也把这个意义的信号描述叫做信号的基本统计属性。

前面已经说明，不管用什么样的坐标描述信号，一个信号的模总是确定的，它在一定程度上代表了信号的功率或能量。这实际上是我们称呼的信号的大小，可以用时域或频域的描述精确地计算，我们把它称为信号的第一个基本属性，叫做信号的强度，并且用字母 W 标记。如果用公式表示，就是

$$W = \int s^2(t) \cdot dt = \int |F(\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (1.51)$$

显然，任何一个信号都会有一个非负强度。在这个积分中，积分限原则上是从负无穷到正无穷，或者说是覆盖具有信号的整个积分域。读者很容易体会到，在这里给出的实际上仅仅是计算信号能量的两个特殊公式，分别从时域和频域的观点看信号。但是这里出现的等式实际上反映了一个概念，不管我们怎样描述信号，在其他任何一个分解信号的坐标系内，对信号能量做积累，得到的结果也将是相同的。

如果将信号除以强度的平方根，也就是将信号的强度扣除，所得到的结果将具有下面的特性

$$\int \left[\frac{s(t)}{\sqrt{W}} \right]^2 \cdot dt = \int \left| \frac{F(\omega)}{\sqrt{W}} \right|^2 \cdot d\omega = 1 \quad (1.52)$$

于是，这样的被积函数，也就是归一后的信号的平方，从数学的角度看，就好像是一个概率密度函数，因为它必然是非负的、积分总和为1。

于是，我们将很自然地由一个概率密度分布函数所关联的两个最基本的统计量，也就是统计变量的数学期望和标准差，把信号类比地看成为随机变量，引进它的另外两个基本统计属性：它的位置和跨度。由于我们可以在时域和频域内看信号，也就存在由此定义的信号在时域内的位置 t_0 和时间宽度 ΔT ，以及在频域内的位置 f_0 和频带宽度 ΔF 。

$$t_0 = \int t \frac{s^2(t)}{W} \cdot dt \quad (1.53)$$

$$\Delta T = \sqrt{\int (t - t_0)^2 \frac{s^2(t)}{W} \cdot dt} \quad (1.54)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int \omega \frac{F^2(\omega)}{W} \cdot d\omega = \int f \frac{F^2(\omega)}{W} \cdot d\omega \quad (1.55)$$

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int (\omega - \omega_0)^2 \frac{F^2(\omega)}{W} \cdot d\omega} = \sqrt{\int (f - f_0)^2 \frac{F^2(\omega)}{W} \cdot d\omega} \quad (1.56)$$

读者应当接受这样的概念，这里所定义的信号的宽度，并不等于我们直觉的信号跨度。比如说，对于一个方波脉冲，如果脉冲宽度为 T ，那它在时间轴上的跨度就是 T ，但是，根据定义所计算的它的时间宽度却是

$$\Delta T = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} \frac{t^2}{T} \cdot dt} = \sqrt{\frac{T^2}{12}} = \frac{T}{2\sqrt{3}} \quad (1.57)$$

它比 T 要小不少！

我们之所以要明确地定义信号在时域和频域的这些统计属性，是因为雷达界的理论研究，在很久以前就明确了它们之间的一个基本关系。这个关系指出，如果我们试图测量一个信号的时间和频率，也就是获得确切的上述定义的信号的时间位置和频率位置，其极限可获得的测量精度将反比于信号的强度的平方根，也反比于上述定义的信号的频带宽度和时间宽度。用公式来描述，就是下面的两个不等式，其中的 δt 和 δf 分别为用标准差表示的测量精度。我们采用不等式，就是表示了测量的一种极限。

$$\delta t \cdots \frac{1}{2\pi \Delta F \sqrt{2W/n_0}} \quad (1.58)$$

$$\delta f \cdots \frac{1}{2\pi \Delta T \sqrt{2W/n_0}} \quad (1.59)$$

公式中出现了常数 2π 是因为时间 t 的真正的对偶不是我们习惯的频率 f ，而是信号的角频 ω 。信号能量所起的作用是相对于噪声背景的频谱密度的，由于我们在物理上使用的频谱均是在正频率范围内的，而数学意义的频谱将跨越正、负频率，使数学上的频谱密度只有物理上的一半，结果在公式的分母根号内出现了一个系数 2。

需要指出的是，我们在 1.6 节说明了不确定性原理，但是那并不是说，对任何一个信号，能够测量得到的时间位置的精度和频率位置的精度的乘积必定不能小于某个常数界限。因为上两式的结果为

$$\delta t \cdot \delta f \cdots \frac{1}{4\pi^2 \Delta F \cdot \Delta T \cdot 2W / n_0} \quad (1.60)$$

而不确定性原理给出的是式 (1.47)，它可以写成

$$\frac{1}{2\pi \cdot W / n_0} \cdots \frac{1}{4\pi^2 \Delta F \cdot \Delta T \cdot 2W / n_0} \quad (1.61)$$

我们无法确定地给出 $\delta t \delta f$ 有什么界限。一个信号的形式，可以被设计成它的时间宽度和频带宽度足够大，于是，对这样的信号测量，所可能获得的两个精度的乘积也就可能足够小。

第 2 章 信号的信息能力

2.1 信息基础知识

为了研究信号的信息能力，首先回顾一下与信息有关的一些基础知识。

我们认为，信号给使用者以信息，其表现为，当我们得到某个信号后，原来不确定的事件变得确定了。也就是说，对于信号的存在所给出的事件的确定性，如果在得知信号前认定该事件发生的可能性越小，信息量就越大。于是，引入下列的度量信息的概念：设得知信号前事件所发生的概率为 $p(x)$ ，信号所包含的信息量为：

$$I = \log_a \left[\frac{1}{p(x)} \right] = -\log_a [p(x)] \quad (2.1)$$

式中，当对数函数的底为 2 时，计算所得到的信息量的单位为比特；若对数底为自然指数 e ，单位为奈特；若对数底为 10，单位为哈特莱。在这三个单位中，获得广泛应用的是比特。

若一个信号可能出现多种状态，其中每一个出现的概率为 $p_i(x)$ ，那么这样的信号所携带的平均信息量为：

$$H = -\sum_i p_i(x) \cdot \log_a [p_i(x)] \quad (2.2)$$

同样地，当 $a=2$ 时，得到的信息量的单位为比特。

信号在一个通道中传输，可以携带信息，其最大的速率被称为该通道的信道容量。香农理论指出，信道容量为：

$$C = B \cdot \log_2(1 + S/N) \quad (2.3)$$

式中 B 为信道的频带宽度, S/N 为信号噪声功率比, 计算结果的单位为比特每秒。如果噪声为白噪声, 即与带宽成正比, 结果为:

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{n_0 B / 2}\right) \quad (2.4)$$

其中 n_0 为单位带宽内的实际噪声功率, 由于在信号处理中我们可能将正负频率区分开, 因此仅仅使用了它的一半。当带宽足够大, 或信号功率比较小时, 式中的对数可以取其近似值, 公式成为:

$$C \approx B \cdot 1.44 \frac{2S}{n_0 B} = 1.44 \frac{2S}{n_0} \quad (2.5)$$

也就是说, 通道的信道容量正比于信号的功率, 反比于噪声功率的谱密度。

这里, 我们看到了一个非常有意思的现象。由于公式中有一个对数函数, 呈现出非线性, 用信号传递信息, 大信噪比时容量并不正比于功率。也就是说, 信号功率增加一倍, 所能够传输的信息量并不能增加一倍。信号的这一特征告诉我们, 使用信号时, 低信噪比似乎比高信噪比要划算。

虽然上面分析的是信道容量, 实际上, 得到结论的重要参数并不是这个信道的长短或特性, 而是其中所传输的信号的功率, 以及在这个信道中的噪声背景情况。因此, 可以理解, 实际上这应当是信号的最大信息携带量。它在本质上是属于信号的, 是相对于噪声背景的, 而与信道没有直接的关系。当一个信道对信号有衰减时, 随着信号的传输, 其功率减少, 能够携带的最大信息流量也对应地减少。所以从 2.2 节起, 我们将直接研究信号的信息能力, 即一个信号最多能携带多少信息量。而且可以预期, 这个能力与信号的能量相关, 与所处条件下的背景噪声相关, 很可能与其他因素无关。

实际上, 如果将信道容量公式做一个改变, 将它的两边乘以时间, 就成为这个信道所能够传输的信息的总量与信号能量的关系:

$$I \approx 1.44 \frac{2W}{n_0} \quad (2.6)$$

它的物理意义是, 一个能量为 W 的信号, 在噪声功率谱密度为 n_0 的背景环境下, 最多能够携带的信息量, 用比特表示, 大约是它们比值 ($2W/n_0$) 的 1.44 倍。非常有意思的是, 这里所给出的结果与信号的时间跨度和频率跨度无关。不过根据前面的叙述, 这个极限将发生在信噪比趋于零的状态下, 也就是说, 信号的时间跨度和频率跨度都在某种意义上足够大。一个直觉是, 如果时间跨度和频率跨度没有满足这样的条件, 信号的信息能力将比这样的一个极限要低。

2.2 信号的信息能力

在第 1 章中, 已经表明, 一个具有一定时间长度 T 和频带宽度 B 的信号, 可以被表示成 $n=2BT$ 点数据 (在第 1 章中, 给出的这个数据为 $2BT+1$, 在 BT 比较大时, 即使数量有偏差, 这个偏差也是微不足道的)。每一点信号都可能携带一定量的信息, 在本节中我们将推导信号的信息能力, 即一个信号最多能携带多少信息量。

假设对于信号被描述的每一维, 或者我们更习惯说的每一点, 信号可能出现的功率的最大值为 P_s , 平均每 m 点功率相对集中在一点处, 且在这一点处, 出现不同功率的概率是均匀分布的。与信号同时存在、不可消除的噪声功率为 P_n , 那么, 总的功率的最大将为 $P_s + P_n = P_n(1 + \frac{P_s}{P_n})$ 。在描述信号的每一点处, 总可以将信号的幅度

量化成一定数量的不同状态, 不管具体有多少种可能, 这个范围一定正比于信号电压, 也就是信号功率的平方根。于是, 出现在某一

具体的状态处的概率将反比于功率的平方根和 m 。根据信息的计量方法，每一点信号所可能携带的信息量将为：

$$I_b = \frac{1}{m} \log_2 [mk\sqrt{P_n} \sqrt{1 + \frac{P_s}{P_n}}] \quad (2.7)$$

由于在没有信号时，信号所携带的信息量为零，于是上式为：

$$I_b = \frac{1}{2m} \log_2 (1 + \frac{P_s}{P_n}) \quad (2.8)$$

在这样的假设下，如果信号的带宽为 B ，时间长度为 T ，那么，信号将总共有 $n=2BT$ 点，于是，整个信号可能携带的最大信息量为：

$$I = \frac{BT}{m} \log_2 (1 + \frac{P_s}{P_n}) \quad (2.9)$$

如果我们考虑所有的点，那么信号的平均功率为：

$$P = \frac{P_s}{2m} \quad (2.10)$$

而作为背景的噪声功率为：

$$P_n = B \cdot n_0 \quad (2.11)$$

n_0 为背景噪声的谱密度。如果仅考虑热噪声，在一般的常温条件下，不考虑接收系统的噪声系数时，可以取 $n_0 = -204 \text{dBW/Hz} = -204 \text{dBJ}$ 。

于是得到：

$$I = \frac{BT}{m} \log_2 (1 + \frac{2mPT}{BTn_0}) = \frac{BT}{m} \log_2 (1 + \frac{m}{BT} \cdot \frac{2W}{n_0}) \quad (2.12)$$

其中 $W=PT$ 是信号的总能量。在这种情况下，信号的信息能力在一定意义上随信号时间带宽乘积增长，也随信号能量增长。

当我们关注信号携带信息的能力时，再次改写上式，成为：

$$I = \frac{2W}{n_0} \cdot \frac{BT}{m} \cdot \frac{n_0}{2W} \log_2 \left(1 + \frac{m}{BT} \cdot \frac{2W}{n_0} \right) = \frac{2W}{n_0} \cdot \frac{\log_2(1+x)}{x} \quad (2.13)$$

等式右边由两部分的乘积构成，前面是相对于背景噪声谱密度的信号能量，后面是一个系数。这个系数随 $x = \frac{m}{BT} \cdot \frac{2W}{n_0}$ 变化的规律如图

2.1 所示，它在 $x \rightarrow \infty$ 时趋于 0，而在 $x \rightarrow 0$ 时达到最大值 $\frac{1}{\ln 2} \approx 1.44$ 。

式 (2.13) 的意义为，信号携带信息的能力与信号能量对背景噪声的谱密度之比成正比，这个比例系数的最大值大约为 1.44 比特。如果只有热噪声，这个状态就是说，大约每 -208.6 分贝焦耳 1 比特。或者反过来说，我们要携带信息，每 1 比特至少需要的信号能量为大约 -208.6 分贝焦耳或 1.38×10^{-21} 焦耳。

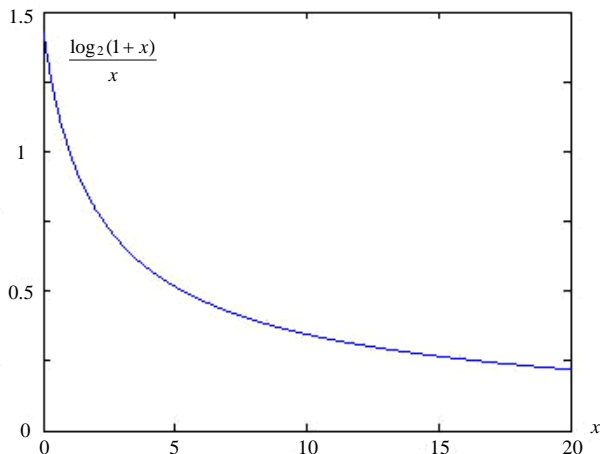


图 2.1 信号携带信息能力的特性曲线

如果把这个公式与式 (2.6) 对比，就可以发现，在这里所推导的信号的信息能力与研究信息理论时所指出的一个通道的信道容

量在内容上是一致的。信号具有一定的时间长度，所以我们更倾向于使用信号的信息能力而没有使用速率这样的容量。由于我们在2.1节所指出的非线性，或者说，公式(2.13)中的系数本身就是信号功率、时间长度、频带宽度等的函数，信号能力并不随其功率的增加严格地成正比。只有当信号功率相当小时，线性关系才近似成立。一旦信号强度到达一定的程度，其能力的增加将慢于功率的增加。或者更一般地说，信息能力是一个非线性的度量，只要没有使用在比较临界的状态下，信号的信息能力总不会全部表现出来。还有， x 的定义似乎还告诉我们，如果信号的时间、带宽乘积比较大，而能量又比较小，那么，由于 x 比较小，我们更有希望达到信号携带信息的最大能力。

值得指出的是，在绝大多数工程中，我们都没有使用到公式(2.13)所给出的极限状态。比如说，作为一个通信的应用，如果需要传送的信息量为1000比特，在接收处看，需要的最小信号能量仅仅为 1.38×10^{-18} 焦耳。如果我们用1秒钟实现这部分能量，信号在接收处的功率仅为 1.38×10^{-18} 瓦。如果考虑理想的信号传播，设信号的接收地点离发射地点的距离为100千米，接收天线的等效口面积为0.01平方米，在一切理想、接收机噪声系数为0分贝的条件下，我们要求的发射处的平均等效辐射功率也仅为-47.5dBW，或者不足50微瓦。读者一定可以发现，这样的结果是相当诱人的。

如果根据目标处发出的信号所携带的信息确定目标的位置，并且假定已经知道只有一个目标，我们获取的信息量仅仅是位置，又假定获取的位置精度为在两维平面内达到各维尺度的大约1/4000。这个问题所含的信息量是12比特的两倍，其实不过只有24比特。因此，在接收处，我们要求的最小信号能量仅仅为 3.4×10^{-20} 焦耳。如果用200毫秒时间的信号完成，需要信号在接收处的功率为 1.7×10^{-19} 瓦。如果目标离接收机的距离为100千米，接收机天线的等效口面积为0.5平方米，在目标处看，其等效发射功率为大约

-73.7dBW。这是一个大约不到 0.05 微瓦的小功率。也就是说，侦察设备在知道信号特征的前提下，有可能具有非常强的发现辐射源、并确定其位置到一定精度的能力。如果目标是被外界照射的，等效反射面积为 0.2 平方米，照射源离它也有 100 千米远，这个照射源的平均等效发射功率需要有 44.3dBW，或者不到 27 千瓦。这样一份功率，虽然不是非常小，却还是可以工程实现的，我们可能用外照射的办法，探测小反射面积的目标，这样的前景也是非常有用的。

本节给出了信号的信息能力，它是一种理论极限。那么，在实际工程中，我们能不能利用信号的这种能力呢？在绝大多数已经开发的应用中，是否达到或接近了这样的极限呢？从下一节开始，我们将对部分人们相当熟悉的应用做一些分析。

2.3 获取信号能力的条件

已经明确，所谓通过信号的接收获取了信息，是指在接收到信号前，对于某个事件的可能性处于未知状态，事件是概率型的，但是在接收到信号后，这个事件变得确定了。因此，要获得信号携带信息的能力，需要明确定义我们关注的事件是什么，而且是接收信号前后有差异的事件。

首先，让我们分析一下测量的效果，而且将问题简化为一维。也就是说，假设我们面对一个一维的物理量，在获得测量前，是一种状态，而在获得测量后，不确定性有所减少，成为另外一个状态，由此让我们获得信息。面对这样一个简单的模型，首先让我们考虑一个熟悉的例子。假设这个物理量可能的区域的范围为 n ，测量得到的是它落在被均匀划分的哪一个小单元中。根据熵的定义，它为：

$$I = \sum p \cdot \ln\left(\frac{1}{p}\right) \quad (2.14)$$

也就是说，在测量前，熵为 $\ln(n)$ ，而测量后，熵为 0。于是，我们说，测量得到的信息量为 $\ln(n)$ 。比如说，当 $n=64$ 时，测量给出的信息为 $\ln(64)$ 奈特，或者将这里的对数的底换成 2，结果成为 6 比特。

最简单的测量是把区间划分为 2，或者仅仅是作出一种有、无或是、非的判定，这样，我们能获得的信息量是 1 比特。

接下来，讨论更一般化的情况。如果测量给出的是一个具体的量值，标准差为 1，我们得到的信息是多少？假设测量结果表明的是真实量可能在任意的位置上，不过出现的概率大小不同而已，那么，将区域划分成很多小区，就可以计算测量后的熵为：

$$I = \sum f(x)\Delta x \cdot \ln\left(\frac{1}{f(x)\Delta x}\right) \quad (2.15)$$

这里的 $f(x)$ 为误差的概率密度函数，如果误差是正态分布的，它就是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2})$ 。为了计算的简单，不妨做一个简单假设，认为求和包括了正态分布涉及的所有无数个单元，也就是说让 x 的变化范围延伸到无穷。然后，用积分替代求和，得到下列结果：

$$I = \int \frac{\ln(2\pi) + x^2}{2} \exp(-\frac{x^2}{2}) \cdot dx = \frac{\ln(2\pi) + 1}{2} \approx 1.419 \quad (2.16)$$

也就是说，测量后的熵还有大约 1.42 奈特。或者说，这样的测量，与前一种相比，能够给出的信息量要少大约 1.42 奈特。或者等价地说，与前一种测量相比，相当于测量给出的分区的大小扩大了一个倍数，这个倍数等于 $\exp(1.419) \approx 4.13$ 。工程的简化，我们可以把这个数定为 4。

实际上，分区的测量可以被看成是误差分布为在一定范围内均匀分布的一个测量。当区间宽度为 1 时，误差的标准差为 $1/\sqrt{3} \approx 0.2887$ 。反过来，如果我们把测量的标准差设定为 1，那么，

区间的宽度大约为 3.464。在总范围大小为 n 时, 测量给出的信息量将是 $\ln(0.2887n) \approx \ln(n) - 1.24$ 。与正态分布的测量相比, 给出的信息还要多大约 0.18 奈特, 或 0.16 比特。这个关系对应的倍数为 $\exp(0.18) \approx 1.2$, 也就是说, 正态分布测量的标准差为 1, 所获得的信息量近似等于分区测量条件下标准差为 1.2 的状态。或者我们就用前面所得到的结果, 正态分布测量的标准差为 1, 所获得的信息量近似等于分区测量时小区宽度为 4 的状态。

举例说, 如果区域范围是正态分布测量标准差的 512 倍时, 通过测量, 我们可获得的信息量大约是 $\log_2(512/4) = 7$ 比特。如果我们想简单地记忆这个结果, 就是将范围除测量标准差, 取以 2 为底的对数, 将结果减去 2, 就得到测量所获得的信息的比特数。

这个分析在一定程度上告诉我们一条途径, 采用测量可以获取信号携带的信息, 我们可以把它看成获取信号能力的一种条件。但是我们也应当理解, 测量所能够获取的信息, 在一定意义上是相当有限的。假设我们已经能够将信号变换成在一个特定的物理维上的幅度, 测量又是理想的, 误差完全由背景噪声决定, 那么, 在信号的抽象幅度在一定的范围内呈均匀分布时, 我们可以得到的上述区域范围与测量标准差的比值将就是在这个特定维内信号的平均幅度与噪声标准差的两倍, 不难通过分析得到, 这也就是信号能量与背景噪声谱密度的两倍, 或前面反复用到的 $2W/n_0$ 。测量提取的信息量为 $\log_2(2W/n_0) - 2$, 但是信号的极限能力却为 $1.44 \times 2W/n_0$ 。图 2.2 给出了两者的比较。

由图 2.2 可以看到, 不但测量所能给出的信息远小于极限, 而且两者存在两个明显的差异: 第一, 理论极限表现为有能量的信号就具有信息能力, 但是采用测量这样的具体方法, 信号能量至少要与背景噪声谱密度相当; 第二, 理论极限的信号能力与其能量成正比, 但采用测量这样的具体方法, 两者的关系是非线性的, 似乎存在一个相对合理的区域, 不但信号过弱无法被利用, 信号过强必然

表现为一定的浪费。

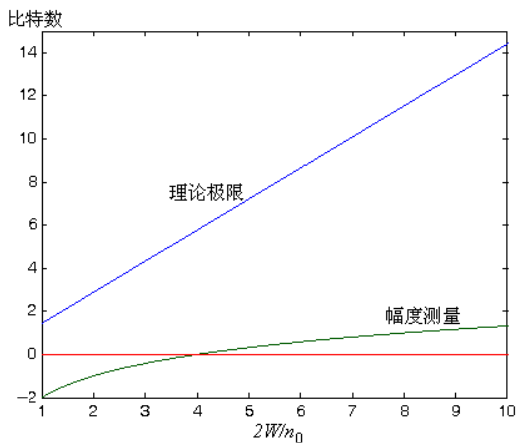


图 2.2 测量获得的信号能力与极限的比较

我们接收信号，首先获得的是信号的功率，它是接收信号前未知的一个因素。如果我们连有没有信号都不知道，又怎样提取信号中所携带的信息呢？如果利用平均功率携带信息，是相当不划算的。一方面因为它仅仅是一个状态，信息量相当有限。另一方面因为随着传输条件的不同，要控制接收端的信号强度，不是一件容易的事。但是，不同瞬间的相对的信号强度，与信号的平均强度相比，甚至与背景噪声的平均强度相比，却具有明确的意义，在接收信号前未知，而在接收信号后已知，可以比较好地用来携带信息。因此，信号在某个意义下的域看，其幅度不能恒定，而且仅仅在一定的跨度内存在，是我们以这种方式获取信息的条件。在这种方式下，因为是信号与自身在其他位置上的幅度比较，事前不需要太多的先验信息。在第1章中，已经介绍了信号的描述，只要将信号分段，这样的比较就可以进行。也就是说，从某意义上讲，这样的条件总是被实际默认地满足了的。

一个信号，如果在时域上和频域上都是无限、绝对稳定的，那

么，在接收它的前后，什么差别也没有发生，信号在这种状态下不可能携带信息。非常幸运的是，任何信号实际上只能占有一定宽度的时间和频率。于是，我们可以利用它在时间和频率维上的描述，信号的时间和频率将被用来携带信息。根据第 1 章的描述，它可以包括位置和宽度。而一个信号的时间、频率上的位置和宽度，是它的一个基本统计属性，这样的条件也是被默认满足了的。不过为了使用它们，我们需要参考，也就是需要时间和频率的起点和尺度。这样的参考，既可以是绝对的，也可以是相对的。如果参考是绝对的，我们将不需要先验信息；如果参考是相对的，也就是相对于某一个样板，对于这样的方式，获取作为参考的信号的时间、频率维的位置和宽度将是必需的。如果手头具有参考信号的样板，所包含的信息当然多于我们的必需。

信号显然还可以有其他参数，比如相位，或者在很多形态中的某一种，等等。有了前面的论述，我们已经可以体会到，要想使用信号传递和获取信息，对实质的更一般性的理解是，我们总是要把接收到的信号在某种意义上与某种样板进行比较，或按照某种规定实施具有意义的物理量的测量，从差异中得到某种肯定，而这原本是在收到信号前不知道的。这个信号样板和物理量的基准可以是事先存储或规定的，也可以是实时接收的，也可以是通过信号本身计算得到的。

实际上，我们已经讨论了信号的描述，一个信号可以经过变换，成为某种合适的描述形式。在这种形式中，通过接收信号，要么得到不同点处的信号强度相对于它自身的平均强度或背景噪声的平均强度的一个具体的确定值，要么得到在哪些确定的信号描述维上，信号分量的强度达到超过层次。这种所获得的确定性就给出了信号所携带的信息。于是，可以更一般性地说，为了获取信号所携带的信息，我们必须清楚信号是怎样被描述的。而这又等价于说，我们需要明确描述信号的方向函数。如果把某一个、几个或全部方

向函数都叫做提取信息的信号样板,那么,获取信号的信息能力的最基本条件就是需要首先获取信号样板。

一个具体被应用的信号,如果仅仅使用了数量不很大的若干样板,在工程现实上要具体实现,知道这些样板将是合理的,而且也不会很困难。但是,如果一个信号在携带信息时使用了所有的方向函数,由于对于一个时间、带宽乘积并非很小的具体信号而言,方向函数的总数一般是很大的,如果不是下面的特殊条件,在工程实现上将难以获得所有这样的方向函数,从而很难获得信号携带信息的能力。这个特殊条件就是,不同的方向函数仅仅是少数几个方向函数通过简单的规律变化而来的。这样的例子,在前面1章中已经给出过。

需要指出的是,对于任何一个信号,可以变换成的形式不是唯一的,也就是说,可以比对的样板并不一定是一个或一种。不同的比对反映了不同的意义,或者说从不同的角度看同一个信号,只要所做的比较不一样,它所反映的原来不知、而在掌握信号后成为已知的内容当然也就会不一样,或者说具有不同的意义。这样一来,同一个信号,有可能使用自身的一份能量,同时对不同的用户携带不同的信息。而我们在论述信号的信息能力时,并没有申明不能从不同的角度看一个信号。因此,一个信号可能同时为了不同的目的,分别为不同用户携带各自所需要的信息。这样一来,信号所携带的信息量,在很大程度上并没有被我们在2.2节中所导出的公式完全限制住。也就是说,从信号中得到信息的基本要求分析,一个信号可以携带具有理论限制的信息,但是,却可以同时携带多份这样的信息,同时完成多个使命。结果,信号携带信息的总量,可以超过我们前面推导的能力。

如果在一定意义上重复2.2节中数学推导的过程,获取信号所携带的信息的过程如下:首先,利用某种已知的变换,重新描述信号,使得噪声在新描述中具有已知的规律。不妨假设这个规律就是

处处平稳的，具有固定的统计值。然后，将信号归一化，使得在新的描述中，任何一维都可以独立地代表某种信息。最后，将每一维的信号分量幅度转化为对应的信息，综合全部信息，就是我们通过信号得到的信息。这样，利用信号的条件也可以说是实现特殊的变换，或者说，是要有一套合适的、可以很好分解信号的方向函数。如果理论上已经固定了这套方向函数，我们将不需要信号样板。而如果这套方向函数与所使用的信号或其他因素有关，它将来源于某种信号样板，那么，我们就需要获取对应的信号样板。

由于本节描述的抽象性，我们需要在后面的几节中具体说明信号携带信息的能力。由于信号携带信息的方式太多，不可能分析所有的方式，因此，后面的分析也仅仅是一些特定的例子，目的是为了更好地理解信号是怎样携带信息的。

2.4 通信状态下的信号能力

对于信号的使用，有一种状态是在发射前将需要携带的信息加载在信号上，然后在接收处把这个信息取出来。对于这一类应用，在信号传输途径中，关注的信息没有发生改变，我们称这样的应用为**通信类**的应用（这可能并不完全等同于我们习惯的通信）。

在这类应用中，就使用有意识的目标而言，信号传输过程中的衰减、时延或可能的频移将都不是用来携带信息的。于是信息将表现在信号本身相对的幅度变化、频率变化、时间错动、相位跳变等，也表现在信号以其他特定方式描述时，各维分量相对大小的不同取值或变化。因此，获取信息的过程需要比对的是信号的幅度、频率、时间、相位等人们熟悉的调制量，或者用某些事先知道或临时知道的信号样板，变换信号成约定的特殊描述，再比较不同维的相对幅度。原则上讲，对于信息的提取，基本条件仍然是需要信号样板。但是，当我们使用幅度、频率、时间、相位等人们熟悉的调制量时，稳定的单频信号作为参考样板，是某种意义下的一个默认，人们早

就习惯这种方式，不过没有有意识地认为是已经使用了样板。而采用其他方式时，使用样板可能成为必须的显式。

首先，考虑简单的二进制调制信息承载方式，信号的电压取值为 U 表示 1，为 $-U$ 表示 0。于是，信号的功率为 U^2 ，如果每个码元的长度为 T ，这个信号在单位时间内传递的信息量就是 $1/T$ 比特。结果，每传递 1 比特的信息，需要的信号能量为 $U^2 T$ 。假设单位带宽内噪声的功率为 n_0 ，如果需要的带宽是矩形的，宽度为 B ，噪声又成正态分布，那么噪声电压的均方根值将是 $\sqrt{n_0 B}$ 。如果经检验发现，正常获取信息所需要的信号电压与噪声均方根值的比值为 k ，有 $U = k\sqrt{n_0 B}$ 。于是可以得到结论，在这样的设定下，传递 1 比特信息，所需要的信号能量为：

$$W_1 = k^2 n_0 B T = A n_0 \quad (2.17)$$

其中 n_0 为单位带宽内的热噪声，即 -204 分贝焦耳。在 2.2 节中，我们已经推导了在理想的情况下， $A = k^2 B T$ 的极限值为 $1/2.88$ 。下面我们用模拟的方法，指示在工程中，到底需要用多大的 A 值。

随机地设定信号，在限定带宽和含噪的条件下，信号不再成为方波，把信号按每个码元的长度重叠画在一个位置上，结果就是通信中常见的眼图。改变不同的 $B T$ 乘积和 k 值，模拟得到的一些结果如图 2.3 所示。

图中给出的 9 个眼图，横向的 k 值从左往右取 $1/1.5$ 、 $1/1.2$ 、 1 ，纵向的 $B T$ 值从上往下取 0.5 、 1 、 1.5 。对应的 A 值，上面中间的就是 $1/2.88$ 。可以发现，取这个状态的 A 值，我们基本上正确地获取了信号所携带的信息，也就是眼图的眼基本张开，可以正确区分 0 和 1。这一具体工程方法达到了理论估计的极限，已经成为工程中数字通信的常用方法。

这张模拟的图还告诉我们一些信息。从最中间开始，向右提高了信噪比，向下增加了带宽。从图中可以看出，如果采用大一点的

A 值，把它用在信噪比上，效果要比用在带宽上好。

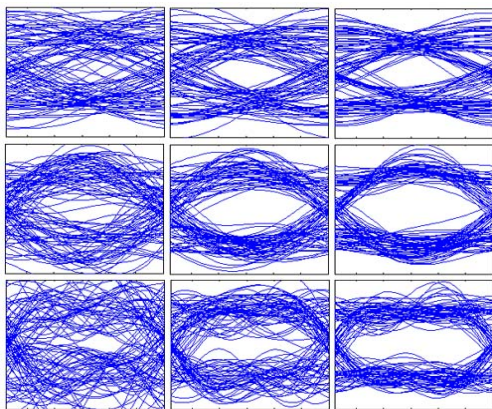


图 2.3 不同 A 值的眼图

对于调幅的应用，假定信息已经理想地承载在调制信号中，即对于调制信号，为每 1 比特的信息，我们所使用的信号能量为 -208.6 分贝焦耳。设调幅信号在时间域内的表示式为：

$$s(t) = [A + f(t)] \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (2.18)$$

其信号频谱由三部分组成：载波在正中间，在载波频率的上下端，有对称的两部分，各自均为调制信号的频谱。为了避免包络的失真，所取 A 的大小将保证式中中方括号内的值永远为正，假定它与调制信号的电压均方根值的比例关系为 k 倍，也就是载波功率为调制信号功率的 k^2 倍的一半。不管用什么办法，只要用频率滤波的方式，就可以取出调制信号。如果提取全部功率，由于频谱包括载波频率上下两段，噪声功率将被加倍；或者如果保留一段带宽的噪声，调制信号的功率将只有一半。这表明，对于这样常规的调幅，我们能够使用的有效功率将只有 $\frac{1}{2(1+k^2)}$ 。对于 $k=2$ 的工程情况，所使用的

有效功率将只有 $1/10$ 。也就是说，即使在这样的理想条件下，对于

每1比特信息，我们需要的信号能量将为-198.6分贝焦耳。在这种应用情况下，默认的信号样板是代表精确载频的单频信号。解调幅可以不精确地知道信号载频，但是相应的代价是，对信号滤波的带宽可能需要略微大一点点，使噪声功率有所增加，我们获取同样信息量的信号能量也将有相应的增加。如果我们能够提供载频信息，就可以省略掉大部分的载波功率，这将使效率由 $1/10$ 上升到接近 $1/2$ 。如果再采用单边带，效率将基本上接近于1。

人们通常认为调幅不利于信息的传递，在这里似乎一点都没有反映。理解的差别在于，我们认为解调幅的抗干扰能力很差，需要比较高的信噪比。而我们在这里分析时，却假定了在正常解调后，我们可以理想地用信号承载和传递信息。问题的核心就在怎样解调。常规认为的解调幅就是检波，首先，它是非线性的，会引入各种效果等同于噪声的干扰。从理想处理的观点看，我们不应该先对信号做检波，在精确知道信号频率后，应该是根据事先约定的所用调制信号的频带特性，把调幅信号的一个或两个边带经过折叠，通过频率移动，直接提取调制信号。这个调制信号当然是包含了对应频带内的噪声，下一步提取信息的过程是我们假定可以理想完成的，与是否采用调幅没有关系。因此，调幅本身并不会降低使用信号的能力，但是，在保留两个边带和载频时，确实浪费了相当部分的信号能量。

对于相位键控，不妨以二相编码为例。在这种调制下，信号的频率是固定的，在每一个码元内，初相也是固定的，但是在码元之间，初相可能有180度的突跳。如果以频率严格相同、初相为第一个码元的初相的连续信号为参考信号，对信号做相关处理，得到的结果将是在码元内幅度要么为正、要么为负的信号，正负仅仅在码元之间跳变。

如果设码元长度为 T ，这个信号在单位时间内传递的信息就是 $1/T$ 比特。假设信号功率为 P ，传递每一比特所需的信号能量就是

PT 。如果相关积累的时间长度为 k_1T ，单位带宽内的噪声功率为 n_0 ，我们可以选取的带宽反比于 T ，为 k_2/T ，于是，可以计算出，信号相关的积累输出正比于 PT ，而噪声积累的输出正比于 n_0 。两者有一定的比例大小时，信息将可以正确获取。这意味着单位比特所需要的信号能量必然正比于 n_0 。选择合适的 k_1 和 k_2 ，可以使这个比值最大，达到极限的容量。通过模拟，我们选择了 $k_1 = k_2 = 0.8$ 。图 2.4 给出了不同信噪比条件下的眼图效果，因为我们已经知道，理论极限为 $PT = n_0/2.88$ ，所以模拟所取的 PT 用 $n_0/2.88$ 来度量，从 $n_0/2.88$ 开始，从左往右、接着到第二排，顺序增加 2 分贝。

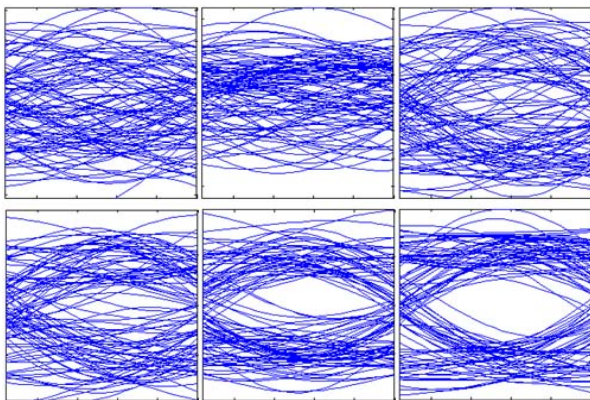


图 2.4 不同信噪比条件下二相码的眼图

可以看到，在作者所使用的**简单积累**的方式下，似乎需要比理论极限多付出 7 到 8 分贝的代价，才能得到满意的信息传输。这里是否存在错误，有待读者去验证。

对于调频的应用，仍然可以假定信息已经理想地承载在调制信号中。为了理解在这种条件下的信号信息关系，我们设想按如下方式处理信号：首先，假定信号频率足够高，同时采用足够高的采样频率获取信号；然后对信号做分段后的短时傅里叶变换，得到不同时间的信号频谱分布。在这样的条件下，我们得到的是每一个短时

段内信号频谱和噪声频谱之和，前者应该表现为一个单峰，后者表现为在带宽内随机起伏，但是呈均匀分布。让我们简单地假设传输为二进制信息，在短时看，信号仅取二个频率中的一个，而解调就是比较这两个频率附近的频谱，得到对应的眼图。我们同样以 $PT=n_0/2.88$ 为参考，对于不同的信噪比，对应的眼图如图 2.5 所示，其中 PT 也是从 $n_0/2.88$ 开始，从左往右、接着到第二排，顺序增加 3 分贝。

可以看到，在作者所设定的模拟条件下，频移键控方式似乎要比理论极限多付出 10 分贝的代价。显然作者所采用的这种方法不是最佳的，导致了在这样的形式下能量没有被充分地利用。

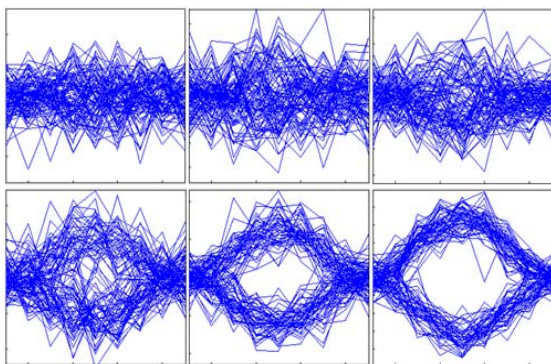


图 2.5 不同信噪比条件下频移键控的眼图

我们并不想在本书的这一节中，严格地指出不同方式的通信是否能达到理论极限，或者判定哪种方式更好一点，或者给出准确的离理论极限的差距。但是至少到目前为止，我们可以有力地表明，对于几种实际采用的通信方式，信手给出的一种办法，所达到的效果离理论极限的差距并不大。我们可以在实践中考虑本章提出的理论极限，即传送信息需要一定的能量，而且这个能量就是比每比特 -208dB 略大一点的值。目前的数字通信，实际上完全实现了理论的预期。

2.5 探测状态下的信号能力

对于信号的使用,还有一种状态是信号在发射时原本没有携带任何信息,当信号遇到目标后,产生一定的反射,信息是加载在反射上的,在接收到反射信号后才把这个信息取出来。在这一类应用中,反射对信号的改变才是信息,信号本身不管是什么样的,本身并不包含信息,由于这样的信息实际上与反射的目标有关,我们称这样的应用为**探测**类的应用(并不只是我们习惯的雷达属于这一类应用)。

在这类应用中,所接收的信号通常包括由发射源直接来的部分和被目标反射的部分,而且目标的反射将是很多单元反射的总和。目标反射的信号与原信号的区别,表现在三个方面。首先是强度,目标通常只能反射所照射的功率的一小部分,因此总是相对的弱信号;其次是时延,只要目标的物理位置不在发射源到接收机的连线上,电磁波从源到目标、再到接收机的距离总是大于从源直接到接收机的距离,于是接收机收到的反射信号总是在直接收到源的信号以后,这个延时量与目标的位置有关;最后是频移,只要目标相对于源或接收机有运动,被反射的信号中就会包含多普勒频移,这个频移量显然与相对运动的速度和方向有关。

首先,用常规意义的脉冲的检测作一定量考虑,认为当信号能量为 $PT=n_0/2.88$ 时,应该传递 1 比特的信息,而只要这个状态下的脉冲信号能够明确地被检测,就给出了脉冲有、无的判断,相当于实现了这样的 1 比特信息的传递。那么,我们还可以用信号能量 PT 是 $n_0/2.88$ 的多少倍的关系来观察脉冲能否被检测。假设高频信号被放大到足够大,检波器的噪声已经不起作用,高频信号的带宽是脉冲宽度倒数的 k 倍,模拟得到的脉冲检波后的波形如图 2.6 所示。

图 2.6 中,从上往下, k 值分别为 0.6、0.8、1,从左往右,信号能量分别比 $n_0/1.44$ 高 16、18、20 分贝。于是可以近似地认为,

对于这样的状态，与理论极限相比，我们需要多付出的代价大约是18分贝。这表明，其实脉冲制的信号不是携带信息的一个最经济的形式。

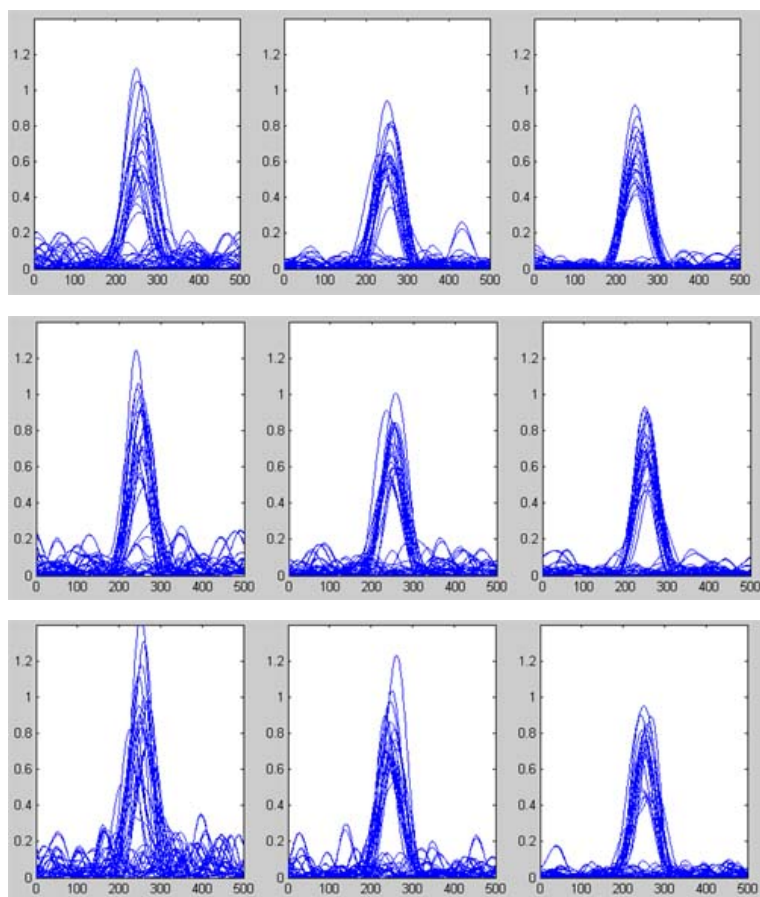


图 2.6 脉冲检波示意图

其实，当我们探讨信号能否被检测时，虽然判定有无所反映的仅仅是一个比特，但是我们确实面临一个探测的漏警概率和虚警概

率的问题。也就是说，我们实际上将要求在有信号时被误判定为没有信号的概率（漏警概率）足够低，同时还要求在没有信号时被误判定为有信号的概率（虚警概率）也足够低。这将要求用于判定信号的那一维在有信号时与无信号时的差距足够大，允许我们在它们的中间设置一个合理的门限，而这是浪费信号能量的最大原因。或者说，判定有无实际上是给出了一种测量结果，而我们在 2.3 节中已经表明，采用测量的办法获取信息，效率并不是那么高的，而且存在一个最小能量的起点。

我们这样来分析一个接收机在判定信号有无时的灵敏度：设我们面对一个信号，它的时间长度为 T ，频带宽度为 B ，峰值功率为 P_m ，平均功率为 P 。信号在进入接收机后，可以被模型为经过两部分处理，一部分是线性处理，另一部分是非线性处理，如图 2.7 所示。对于线性处理，可以不关注信号实际大小的变化，要考虑的将仅仅是信号形式的变化；对于非线性处理，尽管可能有各种各样的方式，但是最终需要给出的是信号存在还是不存在，因此可以只关注门限检测。

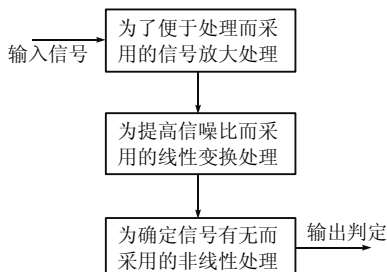


图 2.7 包络判断信号有无的基本框图

根据第 1 章中的论述，总可以找到一种方式，把一个本来为 $n=2BT$ 点的信号经过坐标变换（相当于某种坐标的旋转），变成仅仅只有一点非零的状态。于是，在新的表示形式下，该非零点的幅度将就是这个信号的全部能量，其幅度为 V_s 。

$$V_s = \sqrt{P \cdot T} \quad (2.19)$$

而噪声的功率，信号带宽以外的部分，显然是可以被滤除而不起作用的，应该是

$$P_n = B \cdot P_0 \quad (2.20)$$

其中 P_0 是背景噪声的谱密度。假设变换对噪声的分布不改变其统计特性，也就是说，其能量统计地说仍然被完全均摊到各个方向，在信号那一维上，其能量为 $1/n$ ，对应的电压为：

$$V_n = \sqrt{P_n \cdot T / n} = \sqrt{P_0 / 2} \quad (2.21)$$

也就是说，图 2.7 的上部两个方块所反映的线性变换所可能获得的最好信噪比可以用下式来表示：

$$R = \sqrt{\frac{V_s}{V_n}} = \sqrt{\frac{2P}{P_0} T} \quad (2.22)$$

如果检测信号所需要的、在这一特殊维的功率信噪比为识别系数 D ，那么，功率灵敏度将满足：

$$P = 0.5DP_0 \frac{1}{T} \quad (2.23)$$

或者更方便一点，用信号能量 W 来描述灵敏度，为：

$$W = 0.5DP_0 \quad (2.24)$$

这就是 1 比特信息所需要的能量为背景噪声的谱密度乘以识别系数的一半。我们确实发现它与信号携带信息的能力，也就是相当于背景噪声谱密度的能量能够携带 2.88 比特，有一个明显的差别。就所使用的能量而言，这个比值为：

$$K = 2.88 \times 0.5D = 1.44D \quad (2.25)$$

如果用分贝表示，这个比值大约比识别系数还要高出 1.5 分贝。

图 2.8 给出的是把变换后的背景噪声仍然看成正态分布时的一个统计曲线，它反映的是在不同识别系数条件下可能得到的漏警概率与虚警概率之间的关系。图中曲线的识别系数值被作为参数标注在曲线旁，横坐标为虚警概率，纵坐标为漏警概率，给出的数字是以 10 为底的对数的相反数。图中给出了丢失概率为 $1/1000$ ，虚警概率分别为 $1/10000$ 和 $1/100000$ 的两个点，并用粗点标示作为参考。如果把这样的状态看成是工程可以接受的一般状态，那么，工程使用的识别系数基本上为 16~18 分贝。还可以看到，在这个量值附近，识别系数的提高对于错误概率的降低，效果是非常明显的。这样的分析结果，从另一方面证实了前面所论述的结论，也就是在所假设的条件下检测信号的有无，获取这样形式的一比特信息，需要多付出大约 18 分贝的代价。

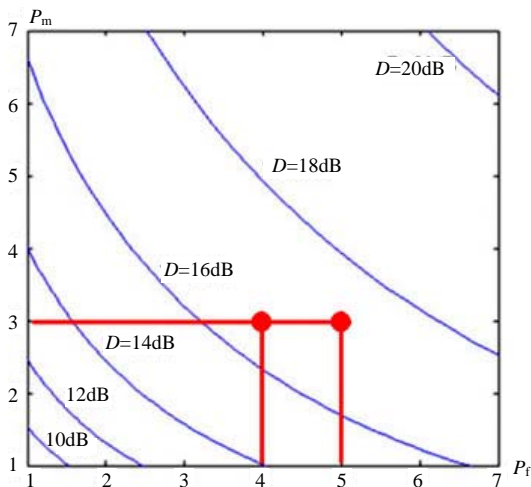


图 2.8 基本检测关系曲线

同时，这里的分析也给出了另外一个基本概念，对于一切探测类的应用，灵敏度的基本极限其实与具体的实现方法和信号形式无关，是背景噪声谱密度高 $16\sim 18$ 分贝，或大约 50 倍。它的度量是信号能量，而不是信号功率。长期以来，人们用信号功率来衡量探测的灵敏度，其实是一种误导。根据这里所给出的概念，如果采用某种具体的信号和处理探测目标，在发现灵敏度不够时，解决问题将有两种可能的途径，一种是提高进入探测装置信号的平均功率，而另一种是提高使用信号的时间跨度。我们必须清醒地认识，信号时间对于探测类的灵敏度是不可忽略的重要因素。

接下来，考虑用一个特例探讨用连续信号获取时间差时，对信号信息能力的利用。假设两个信号具有相同的信噪比，信号被单频调幅（调制深度为 100%），通过比较包络信号的相位，可以测量在调制信号的一个周期内，两个信号的时间差。如果调制信号的相位差的测量精度为 d 度，我们获得的信息量将是 $\log_2(360/d)-2$ 比特。按 3 比特计，相位误差应该是 11.25 度，理论极限指出，信号的强度、时间乘积为 $PT=3\times n_0/2.88$ 。图 2.9 给出了用 $3\times n_0/2.88$ 为单位计量 PT 时，模拟所得到的相位差的均方根误差与信号强度时间乘积的关系。模拟所采用的检测相位差的办法是，先对信号检波，取出调制信号，再检出两个调制信号的相位差。图中横坐标为信号强度超出的分贝数，纵坐标为以度为单位的相位误差。

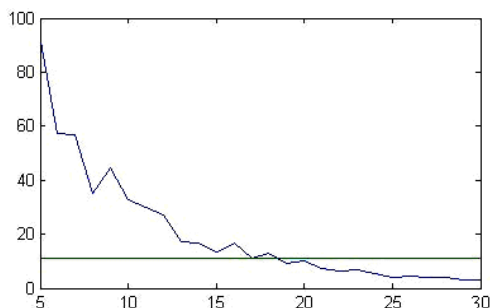


图 2.9 包络相位误差与信噪比的关系

由图 2.9 可知, 要想使误差达到 11.25 度, 需要多付出的代价大约是 18 分贝。这表明, 用这样的方式单纯提取时间信息, 对信号能力的利用也不容易达到最佳, 基本上也需要付出大约 18 分贝的代价。

更一般地考虑信号的时间、频率移动。要想得到关于目标的信息, 或者说, 要让信号具有携带这样的关于目标的信息, 就需要有一定的条件, 那就是, 信号在发生时延和频移后, 不应该是它自身的线性组合, 也不应该是它的数量不多的其他时延和频移后的线性组合。不然的话, 我们仅仅根据信号, 不可能确切地得到关于造成信号成为某个样子的目标时延和频移的原因的信息。

如果我们能够在时—频两个域内表示一个信号, 而且信号呈现为一个无穷窄的冲击, 那么, 它的任何时延和频移将都不是其自身, 信号将可能携带足够大的信息。而且, 只要对应的时延和频移趋于无限, 对应的信息总量也将是无穷的。但是, 事实并不是这样的, 信号的不确定性已经告诉我们, 不存在这样的信号。因此, 在这一类应用中, 不存在可以携带无穷信息的机理, 我们所提出的一定能量的信号只能携带一定量的信息在原则上仍然是肯定成立的。但是另一方面, 我们将会非常关注所采用的信号样式。因为样式的不合理可能带来比较大的模糊, 使我们无法获取期待获得的信息。从这个意义上讲, 消除模糊是在探测类应用中实际提取信息的一个重要内容。

对于具有一定时间、频率宽度的信号, 假定已经付出了高出理论极限 16~18 分贝的代价, 这样的信号能量是可以被合理地检测到的, 但是它仅仅给出了目标有无的 1 比特信息。现在再假定, 信号处理的工作在一个跨度更大的时间、频率范围内进行, 允许我们对信号的时间、频率位置进行测量, 而这个测量结果将会提供目标更多的信息。

如果我们额外地给出一个时间范围 T_1 和频率范围 F_1 , 那么,

当对时间和频率位置的测量精度分别为 δt 和 δf 时, 我们又将额外地获取一份信息, 它的比特量为:

$$\log_2\left(\frac{T_1}{\delta t}\right) - 2 \quad \text{和} \quad \log_2\left(\frac{F_1}{\delta f}\right) - 2 \quad (2.26)$$

根据第1章的论述, 我们知道, 测量误差的可能极限为式(1.58)和式(1.59), 将它们代进去, 就得到增加的信息量的比特数最多可能为:

$$I_a = \log_2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \log_2(T_1 F_1 \Delta T \Delta F) + \log_2\left(\frac{2W}{n_0}\right) \quad (2.27)$$

对于刚刚够检测强度的信号而言, 式(2.27)中前后两项合并的常数大约为6.3比特。

我们看到, 如果设计的信号等效时间宽度和等效频带宽度的乘积比较大, 信号所携带的信息量是可以增加的。非常独特的是, 这样的增加原则上并无上限! 但是清醒的读者立即会发现, 这种信息量的增加与通道容量具有极限的概念并不冲突, 因为我们得到这个增加的代价是付出了更长的时间和更大的频率带宽。但是, 这似乎与信号的信息能力有一定的冲突。因此, 需要明确地补充, 具有一定能量的信号的信息能力, 只是指在约束了时间宽度和频带宽度时所得到的。对于那些时间宽度很大、频带宽度也很大, 但是容纳信息的时间宽度和频带宽度明显超过信号的情况, 自然是需要补充式(2.27)的。

这样的补充给我们指出了一条高效地利用信号能量的办法, 也就是说, 对于工程实际已经被限定能量的信号, 在使用过程中, 如果允许涉及比信号自身更长的时间和更宽的带宽, 信号的信息能力, 从而也就是工程利用信号承载信息的容量, 是可以有比较大的提高的。

对于刚刚够检测强度的信号, 理论极限给出信号能量所对应的

信号能力大约为 145 比特，如果我们期待探测实际上达到单纯由信号能量约束的极限，那么式 (2.27) 中等式右边的第二项大约为 140 比特，两个时间带宽乘积的积是一个非常巨大的数，实际工程通常不会超过。因此，虽然它给了我们很多信息，这个办法实际上仍然不会使信号携带信息的能力比简单情况下的理论极限还要高。

从上面粗略的分析，可以得出这样的概念，作为探测类的应用，一方面，所使用的信号的时间带宽乘积最好尽量地大，其目的是能够让我们获得一个更高维数的信号表达所使用的空间，因此在处理时获得更大的增益；另一方面，从能够充分提取它所携带的信息的角度看，应该是可以让我们最有效地提取时间差和频率差的信号。如果我们从时间—频率两个域上描述一个信号，它表现为一个窄的尖峰，在其所占据的时间范围和频率范围内没有任何意义的重复。显然，这样的信号是不存在的。但是，如果所用的信号是在变形以后的坐标上呈现出尖峰，这后一个要求可以认为也是被满足了的。这样，我们期待的这两方面的要求将同时得到满足。在提取信号的时间、频率两个域内的移动时，我们会在这两个域内对信号做自相关，把大的时间、带宽乘积通过变换消除掉，然后分析。在雷达信号处理中，人们把信号的时间—频率自相关的描述叫做模糊图。确切地定义，一个雷达信号的模糊图函数为：

$$\begin{aligned} A(T, F) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u^*(t+T) \cdot \exp(j2\pi Ft) \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(f) \cdot U^*(f-F) \cdot \exp(j2\pi fT) \cdot df \end{aligned} \quad (2.28)$$

其中 u 为信号的时间波形， U 为对应的信号频谱，函数符号上的星号表示为原函数的复共轭。

根据模糊函数的定义，可以计算得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(T, F)|^2 \cdot dT \cdot dF = (2W)^2 \quad (2.29)$$

其中 W 为信号的能量。模糊函数的模的最大值，就是函数在时间移动为零、频率移动也为零处的自相关，所得到的值就是其能量的两倍。也就是说，模糊函数的最大模为 $2W$ 。如果将模糊函数归一化，即将它除以 $2W$ ，就得到归一后的模糊函数的基本特点为：最大模为 1，总容积恒等于 1。定性地解释，如果模糊函数的主峰的大小为 1，且这个峰就是唯一的峰，它在时间、频率面所占的大小也将大于 1；而如果主峰的大小明显小于 1，或者这个主峰所对应的面积居然也明显地小于 1，那么结果必然是，要么有很多个峰，要么在这个峰外面存在具有相当面积的起伏。

模糊图很直观地给人以一种提取目标信息的概念，如果把强度超过一定程度的模糊图区域看成是信号在图的整个时间—频率域内的某种占位，这个占位的相对面积越小，从信号中可能获取的信息量就越大。但是，前面的说法告诉我们，其实模糊函数的峰所占的面积基本是一个定数，如果某一个峰占的面积很小，原则上一定存在很多个峰，它们引入了结果的模糊。如果有办法消除模糊，就得到了比较多的信息，但是消除模糊同样需要信号能量。

用模糊图来分析现有的雷达信号，可以把不同形式的雷达信号分成四种。它们的图形示意图如图 2.10 所示，左上角为第一种，右上角为第二种，左下角为第三种，右下角为第四种。

第一种是刀刃形且与坐标轴重合的信号，固定载频的脉冲信号就是这一类信号。对于这样的信号，要想在时域内具有窄峰，就必须在频域上比较宽，而要想在频域上形成窄峰，就必须在时域内变宽。第二种信号是倾斜刀刃形信号，其主峰形状还是一条，但却是在时间—频率域内倾斜存在的，线性调频的矩形脉冲就是这样的信号。第三种信号是钉板形的信号，图形呈现为多个尖钉，相干雷达的信号就属于这样的信号。相关信号的模糊函数的主峰可能很小，当信号总长度为 T 时，它的频域宽度接近 $1/T$ ，信号的频带宽度为 B 时，它的时间宽度接近 $1/B$ 。为了使模糊函数的总面积为 1，一种

可能性就是，这样的模糊函数具有接近 BU 个峰，结果使它像一块钉板。第四种信号是图钉形信号，它的主峰同样是尖钉状的，却只有一个比较高的主峰。为了使模糊函数的总面积为 1，在这样的状态下，要么主峰比较胖一点，也就是分辨率相对稍低一点，要么主峰以外必定有一定的起伏，不可能实现除主峰外没有起伏的状态，也就是处理后出现比较高的栅瓣。

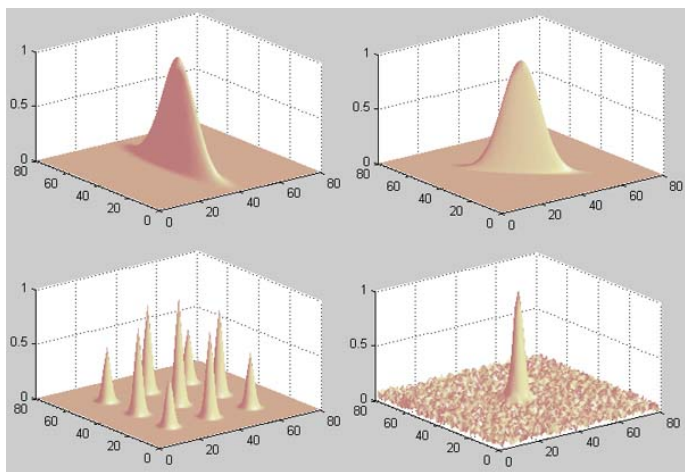


图 2.10 不同信号的模糊图

第 3 章 信息的携带

一个信号具有有限的信息携带能力，但是，从不同的角度看，它均可以具有那么大的能力。也就是说，一个信号可以同时携带多批信息。本章将研究单一地从某个角度看，怎样比较合理地携带信息，以及当同时面对多个不同的应用角度时，应该怎样携带信息。论述将根据信息主要是在发射时就携带的，还是在发射后的传输过程中加上情况，分别展开。

3.1 发射信号时信息的携带

所谓发射时就携带信息，是这样信息传输过程：发射和接收双方是预先约定的，接收方知道发射方将发射信号，也具有相关的接收能力，但是，这个将被接收的信号仍然具有随机性，这个随机性被发射方用来携带信息。

传统的分析认为，发射时的信息是通过调制加载到信号上去的，所以人们研究调幅、调频等，也研究模拟形式的调制和数字形式的调制。本节则根据本书已经论述的信号与信息的基本关系，完全换一个角度来看发射时的信息携带。

在描述一个信号时，实际上就是把一个信号投影到一个高维空间内，不妨记这个高维空间的维数为 n 。如果这个高维空间的各维是彼此独立的，信号在这些不同维内表示的统计大小是某一个值，具体多大接收方事先不知，那么，每一维将都可以携带一定量的信息， n 维可携带的就是它的总和。不管采用什么方式分解，每一维的表示将是一个幅度的大小，但是信号在传输过程中，幅度大小很可能发生变化，因此，这个幅度大小将只具有相对意义。也就是说，

接收方有两种可能提取信息：其一，认为这一维上有分量或没有分量，获取一比特的信息，这样就不在乎幅度的变化；其二，假设信号的总幅度或平均是计量的相对值，或者说，认为所有的分量的幅度的均值为相对的 1，由此确定不同分量的幅度，提取相应的信息。为了论述方便，在本书中分别把它们称为甲类和乙类。

这里，我们看到了甲类和乙类在发射时就携带信息的两种方式的差别在于接收时对信号幅度的判断。为此，先对两种方式进行一个比较。对于甲类，我们的判定是 0 和 1；而对于乙类，需要判定是多少。假设噪声的相对统计幅度按功率计量为 1，能够判定成 0 或 1 所需要的信号最大功率为 x ，那么能够判定信号幅度按功率计量为 0 到 k 的整数中的某一个所需要的信号最大功率将是 kx 。对于甲类，当 0、1 等概率时，信号的平均功率为 $x/2$ ，可以携带的信息量为 1 比特；而对于乙类，当各层次功率出现为等概率时，信号的平均功率为 $kx/2$ ，可以携带的信息量为 $\log_2(1+k)$ 比特。因此，可以得出一个结论：两种情况下单位功率或能量所可以携带的信息量的倍数关系为效率 E ：

$$E = \frac{\log_2(1+k)}{k} \quad (3.1)$$

对于不同的 k 值， E 与 k 的关系如图 3.1 所示。可以清楚地看到，由于甲类的 $k=1$ ，乙类的 $k>1$ ，**甲类的效率总是比乙类高**。即使对于把幅度仅仅分成 100 份这样的状态，乙类的效率仅为甲类的不到 7%，这可以说是人们乐于接受采用数字化方式进行通信的一个重要原因之一。需要特别强调的是，我们在这里所给出的比较，与具体采用什么方式把信号分解成某个特种高维空间的分量、用什么方式去调制，以及怎样设定门限去判定，均没有直接关系。这是一个普遍适用的原则。

需要说明的是，在甲类中，似乎还存在另一种不同的方式，即把某一维信号的分量设置为正 1 和负 1。实际上，这样做的结果，

减少了信号的峰值功率，但是在生成 1 和 0 时，都需要信号功率。如果使用 1 和 0 的概率是一样的，那么，所使用的平均功率也将是一样的。正是由于这样的分析考虑，我们在本节中没有把幅度的有无与幅度的正负分别理解为两种不同的方式。

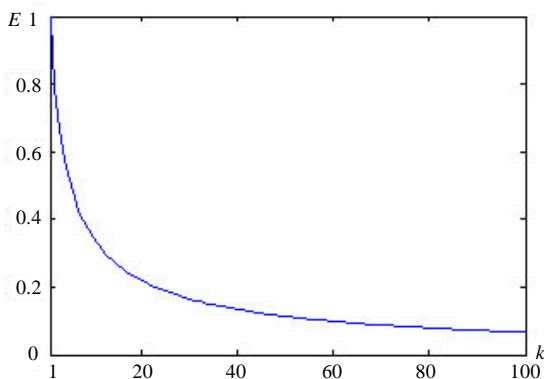


图 3.1 两类信号携带信息的效率比较

接下来分析把信号分成多维的方式，这当然是指分解成彼此独立的多维。当信号具有一定的时间长度时，这样做似乎不存在任何限制。问题是，当信号被分解后，它的功率也被分解，噪声的功率也被分解。如果这样的分解全是均布的，对于每一维，信号与噪声的比值将没有发生变化，如果一维可以携带一定量的信息，那么 n 维将可以携带 n 倍的信息。对于噪声，如果来源为随机的热噪声，我们认为它具有极强的随机性，其结果可以认为功率在各维上几乎相同。但是，对于用来携带信息的信号，一旦这样的分解不是均布的，就可能出现这样的局面：分解以后一维内的信噪比，有些较高，而有些则较低。由于当信噪比较高时，所能够携带的信息量呈对数增长，因此就会出现这样的现象：任取两个信噪比不同的维，如果能够将信号功率重新分配，使它们两的信噪比变得相同，结果，低信噪比维所增加的信息携带量将高于高信噪比维所减少的信息携

带量。用公式表示，也就是：

$$2\log_2(1 + \frac{x_1 + x_2}{2}) > \log_2(1 + x_1) + \log_2(1 + x_2) \quad (3.2)$$

根据严格的数学等价关系，这一公式可以依次等价于 $(1 + \frac{x_1 + x_2}{2})^2 > (1 + x_1)(1 + x_2) \Rightarrow (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 > x_1 x_2 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$ ，这最后一式的成立就证明了式(3.2)的成立。重复这个思路，其极限就是，当信号的分解呈等功率时，携带信息的效率将是最高的。或者说，当噪声被信号匹配变换时，有用维的密度没有增加，使用该维携带信息是合理的。我们称这一原理为最优携带原理。

接下来，让我们用这样的新观点来看待传统的信息携带方式。首先是微观地看不同形式的调制。

发射一个单频的简谐波是一种最简单的情况，当从频域内看信号时，这样的信号只有一维，它的幅度是可以用来携带的唯一手段。当这个幅度只取 0 和 1 时，就是甲类，它也就是我们习惯的幅度键控。在这种情况下，一段时间的信号仅仅携带一比特的信息。当这个幅度为随意时，就成为乙类，我们需要规定一个相对长的时间段，认为这段时间内信号的平均幅度是一个确定值，从而计量不同时间处信号的幅度到底是多少。在这种情况下，每一个时刻所可能携带的信息将与信号的幅度大小能被分解成多少份有关，或与信噪比有关。由于在一小段时间内，信号幅度是恒定的，因此，这样发射的信号是幅度呈台阶型的。幅度连续变化的信号在调制包络的频带有限时，总可以看成对于一定粗细的小时段，其幅度可以被认为是恒定的。

二相编码的信号可以看成是上述情况的一个特例，信号被分解后出现了正负的幅度。由于噪声没有被改变，区分正负所需要的功率峰值被减少了一半，但是由于信号连续使用功率，平均功率被加大了一倍。结果，携带信息的效率没有发生变化。

如果在一个小时段内发射单频的简谐波，但是在不同的小时段内分别用两个频率代表某一个比特的 0 和 1，信号的功率也将变得恒定，这就是常用的移频键控形式。这时，两个频率分量所构成的信号很容易设计成正交的，信号的表示从频域上看实际上是只有两维的。如果我们在识别信号属于哪个频率时，把噪声也分割了，那么情况与两次独立地使用前面所论述的幅度键控并无区别。但是实际上，两个频率的带宽总是要宽一点，在确定信号为 0 还是 1 之前，我们无法知道它在哪个频率上，因此，移频键控的效率可能会略微低一点。

四相编码采用了正交四个相位，由于正弦与余弦是正交的，这实际上相当于使用了两维，但是对每一个小时段，由于有四种不同的可能性，也构造了两比特的信息，维数的增加提高了对信息的承载量，我们期待它的效率会高一些。

有理由认为，上面这种只从微观看的分析有可能会是不完全合理的。因为从微观的角度看，如果仅仅传递一比特的信息，信号是一个单频的波形，所采用的通道带宽可以无限小，使噪声的功率无限小；但是实际上，只要我们以一定的速率传递信息，任何一种调制方式都需要带宽，使得噪声的功率都不能为无限小，且与带宽的大小有关。所以我们还要从宏观看，观察一长段时间的信号。根据前面给出的最优携带原理，如果从频域内看信号，我们将认为：对于同样的数据速率，信号带宽较小，信号频谱在带内较平坦的调制，其效率将是较高的。

为了验证这个推断，我们采用模拟的方式，固定信息的传输速率，固定噪声的谱密度，对不同的调制方式，观察达到类似眼图所需要的信号平均功率。比较的对象有：幅度键控、移频键控、二相编码、四相编码。在比较时，为了有效地抑制带宽内不需要的噪声，不采用检波的方式提取信息，而是采用相关积累的方式，然后用相对最优的带宽对相关结果滤波，获得对应的眼图。图 3.2 就是这样

获得的眼图的情况，从左往右顺序为上述四种方式；其中最右面的四相编码，因为每一个小时段内含有两比特，其本来是两维的，不好表示，就采用了投影，把它简化为两个一维，所以有两张这样的图。

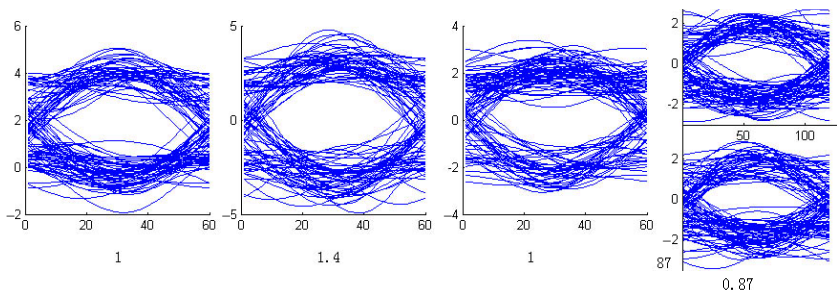


图 3.2 不同调制下的眼图

在图 3.2 中，已经标注了达到该状态的相对功率对应的电压比，顺序分别为 1、1.4、1、0.87。也就是说，实际上这四种调制方式携带信息的效率与前面微观分析还是一致的，四相编码最高，移频键控最低。而这四种调制的信号频谱分别如图 3.3 所示，顺序相同。可以看到，幅度键控与二相编码的频谱几乎是一致的，差别主要在载频处，幅度键控有一个高的载频分量，也就是中心处有一个高的谱峰，而二相编码却没有。应该说，恒定的、不携带信息的载频其实是浪费的，如果我们精确地计量，幅度键控的效率应该低于二相编码。四相编码的频谱宽度似乎要小一些，这导致了它的效率高一点。而移频键控的频谱显然要宽一些，从而导致其效率低一些。

由此，我们在一定程度上旁证了前面所提出的最优携带原理。当我们试图判定什么样的信息携带方式好的时候，如果携带信息所采用的信号描述的维被落实在频域内，我们会简单地观察该信号的频谱，对于同样的信息传输速率，频带内谱密度比较平坦的方式可以被认为是效率比较高的方式。当然我们所说的频谱平坦不是指频谱为一绝对的矩形，因为如果信号频谱是一固定的、形状已知的，

信号就没有不确定性，它就不可能携带信息了。因此，我们所说的平坦仅仅是指统计意义的平坦，或者宏观地看比较长的一段信号、从大致趋势观察到的平坦。

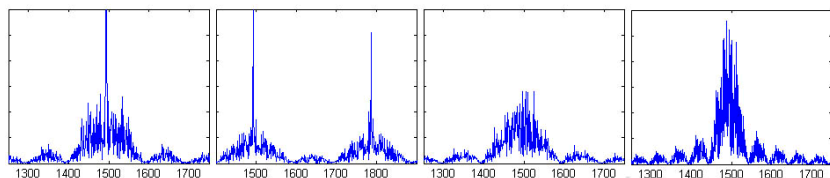


图 3.3 不同调制下的频谱

我们暂且不提出可能使频谱接近矩形的某种可能效率更高的调制方式，先把二相编码的信号做一次频谱整理，切除统计观察所得到的中央最大的哪个主谱峰以外所有小峰的能量，并把中间部分加权，使其接近矩形，它的效率是否会提高呢？为此，我们同样进行模拟计算，并采用了同样的平均功率。为了能看清问题，我们使用了略低一点的信号功率或信噪比，相对于前面用过的值为电压 0.8 倍。模拟的结果如图 3.4 所示。由于差别不是很明显，我们采用了多次结果的比较，图中上一排的结果为常规频谱的状态，而下一排的结果是频谱被略微拉平以后的状态。

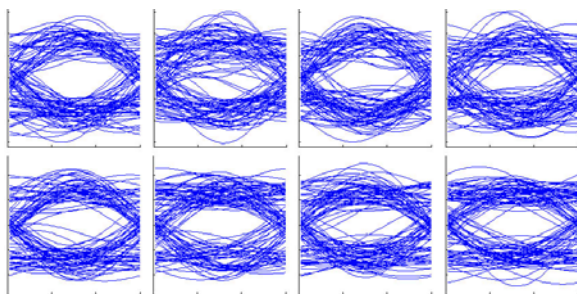


图 3.4 不同频谱形状的眼图比较

可以发现，下一排的效果即使好一点，也相当接近于上一排。

对于这两种状态，对应的信号频谱如图 3.5 所示。可以看到，经过加权后，两种频谱的轮廓已经有所不同，虽然尚不能说差距很大，但是观察频谱的差别还是比观察眼图的差别容易，可以更直观、更清晰地对携带信息的效率作出判断。作者想强调的一个问题是，本书所提出的频谱平坦一点的方式对信号能量的使用效率可能要高一点，这样一个观点到底是否正确，我们并没有给出严格的证明，读者可以有自己的观点。

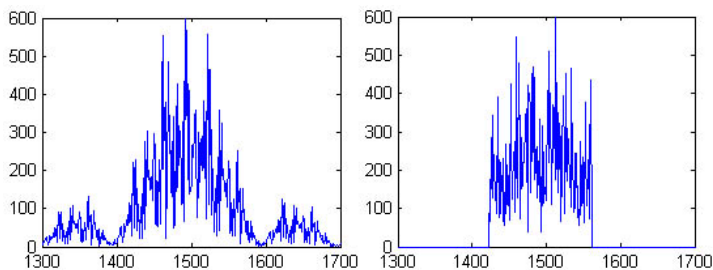


图 3.5 图 3.4 条件下的两种信号频谱

顺便说明：当需要判定两个图形在轮廓上是否与设想的形状一致时，可以引用信号识别中的一个概念，那就是相像系数。两个一维函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，如果它们的最大定义域为 R ，在该定义域内非负，所谓这两个函数的相像系数就是下列定义的系数：

$$C_{f,g} = \frac{\int_R f(x)g(x) \cdot dx}{\sqrt{\int_R f^2(x) \cdot dx} \cdot \sqrt{\int_R g^2(x) \cdot dx}} \quad (3.3)$$

根据著名的希瓦尔兹不等式，我们确知相像系数具有下列性质：

$$0 \leq C_{f,g} \leq 1 \quad (3.4)$$

相像系数为 1 只发生在这两个函数处处仅相差一个比例因子的情况，所以称这两个函数完全相像。而相像系数为 0 只发生在这两个

函数的非零区完全没有重叠的情况，所以称这两个函数完全不像。

有了相像系数的定义，对于上述那样的频谱，就可以用计算来表示它们与矩形频谱的接近程度。实际上，一个在矩形基础上乘以标准正态分布的绝对值的函数与同位置的矩形函数的相像系数大约为 0.8。而如果频谱为一个 sinc 函数的绝对值、包含三个峰、主峰宽度正好为矩形宽度，再乘以标准正态分布的绝对值，它与同样的矩形函数的相像系数将只有 0.8 的 0.86 倍。这个结果反映了两个不同形状函数的差别，可以用简单的计算获得。

当从频域内观察、描述信号时，传统的调制方式仅仅采用了一、二维的信号表示。但是实际上，一个具有一定时间长度的信号可以有多维的表示。如果我们使用了多个正交的维，对每一维的幅度使用正负 1 的状态，就可以携带多比特的信息。移频键控利用了频域内的两个分量，四相编码利用了在一个频率上的正弦和余弦两个正交的分量。如果增加维数，我们可提出的选择将增加很多。可能想到的比较简单的方式就是采用多个不同频率的分量，以及多个在时间上完全错开的分量。这两种方式的多个分量都是彼此正交的，结果可能在实际上使信号波形变得比较复杂。下面对它们进行一定的分析。

首先分析采用多频分量的信息携带方式。一种可能的方式是用频率表示信息，因此我们在一段时间内仅仅发送频带内的一个频率，接收方在截获这个信号后测量这个信号的频率，将它还原为信息。用这种方式传递信息，只要测频的误差小于容忍的极限，信息就不会发生差错。然而，这将如同前面已经提出过的模拟方式的信息携带，在频率精度提高一倍的条件下，所携带的信息量仅仅增加了 1 比特，应该说是很不划算的。实际上，就每一小时段而言，信号的频谱是一个尖峰，也违背了前面所提出的最优信息携带的原则。因此，我们要提出的信息携带不是这种方式。我们把信号划成一个一个方块，也就是一个一个长度一样的时段，每个时段都使用

同样的频带宽度，不妨假设时间长度为 T ，频带宽度为 B （并简化假定频率就是从 0 到 B ）。于是，这个信号的表示，可以被分解成 $2T \times B$ 个完全正交的频率分量，实际上有一半是正弦分量，另一半是余弦分量。也就是说，用 $2B$ 为采样频率，我们可以先在时域上用 $2T \times B$ 个点表示这个信号，然后做离散的傅里叶变换，得到这个信号的频域表示，还是有彼此独立的 $2T \times B$ 个分量。每一个分量是我们携带信息的一维，采用数字方式，也就是分量的大小为 +1 表示 1，-1 表示 0。这实际上是在时间长度 T 内，用 $1/T$ 作为频率分辨率，对每一个频率都采用了四相编码的方式，表示 2 比特的信息。这样做，为了压过噪声，所需要的信号功率似乎会比用简单的调制方式携带信息要大，但是我们一定不要忘记，现在可是在一个时段内同时携带了 $2T \times B$ 比特的信息。

假定我们所涉及的是 64 维的状态，每一个时段将由 64 点构成，在接收到信号后，我们将对它做 FFT，然后判断在 32 个频点上的四相，获取对应的 64 比特的信息。可以发现，这样的每一段信号的时间带宽乘积将只有 32，如果时间段的长度为 1ms，信号的带宽基本上将是 32kHz。这样一个量级，有时与工程实现时所需要的用时间换取功率不吻合，也就是说，我们很可能使用了比较大的功率，获取了高的信息携带速率。工程上会接受更大的带宽，更乐于用更长的时间来换取小的功率。解决这一工程矛盾的基本出路是，提高带宽、缩短时间，但是采用重复的方式。很容易理解，重复实际上是对噪声的一种平滑，它会引起效率的下降。需要分析的是，在效率一方面可能提升、另一方面又可能下降的情况下，最终的结果到底是效率的提高，还是降低。

首先，用模拟来演示可能出现的结果，在与前面给出四相编码的眼图同样的信噪比和传输同样速率的信息的条件下，我们检测每一个频率分量可能出现的状态，结果如图 3.6 所示。图中每一点为一次判定的状态，可以看到，在所给出的大约 1000 次结果中，出

现错误的概率还是很低的，相当于前面眼图中给出的状态。可见，新的调制方式的效果是同样的。

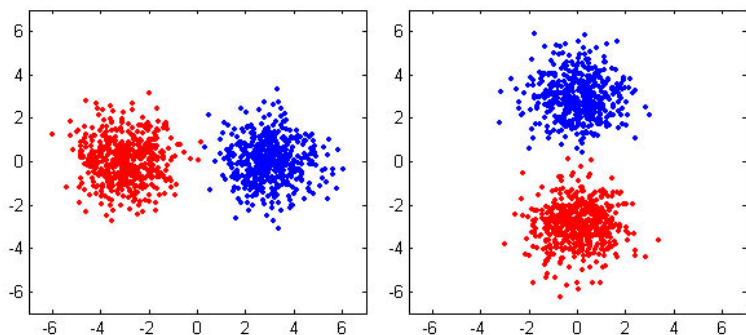


图 3.6 对频率分量正负的判定示意

在本书的前面部分已经证明了传输信息需要的是信号的能量，而不是功率。也就是说，如果能够在一方面获得好处，假设是可以节省功率，那么，在另一方面就将付出代价，对应的是用更多的时间；结果，所用的能量还是这么多。于是，我们期待的是，这种一段多比特的信息携带方式，将与一段单比特的信息携带方式，效率是同样的。当采用四相编码时，每一个码元具有一定的时间长度，在这个时候就进行了时间积累，节省了功率；而当采用上述的频域编码时，每一小段似乎没有积累，但是当我们重复时，也就进行了积累。这样的考虑与前面模拟给出的结果是一致的，因此我们不会得出结论说，新的调制方式在携带信息方面的效率会比传统的更好或更差。

在时域上的不同位置出现信号，携带信息的信号成了冲击位置调制的信号。为了避免出现这样的情况，可以选择一个随机噪声为样本信号，改变这个信号的时间位置。当用相关接收截获信号时，相关计算所得到的位置，就是发送时设置的信号相对位置。采用这种方式，信号的带宽和积累时间都比较容易控制，应该说是一种不

错的方式。但是采用相关接收，解调的过程略微要复杂一点，这将是需要付出的代价。利用本书在前面已经论述过的 H 信号，可能使相关计算的栅瓣在同步良好的条件下几乎为零，从而一个位置的信号基本不会对其他位置产生干扰。

无论这两种调制方式的哪一种，我们都是将多比特的信息捆绑在一些携带的，因此也就有可能与需要采用的纠错编码一起考虑。比如我们用方块码，把原来 25 比特长的信息扩展到 32 比特，现在就可以正好以每 32 比特一组的方式携带。

综上所述，用本节提出的基本观点来看待信息的携带，就可以重新论述在发射时携带信息的一般规则：一个具有一定频带宽度 B 和时间跨度 T 的信号，总可以被分解成若干彼此正交的信号基的不同倍数的和。这样一个最基本的概念，对于在发射时携带信息的应用，同样给出了基本的调制方法。对于所给定的频带宽度 B 和时间跨度 T ，一个任意的信号 $s(t)$ 在被描述时，可以用 n 个正交基 S_i 表示为：

$$s(t) = \sum_i A_i S_i \quad (3.5)$$

其中 A_i 为信号在对应基上的幅度。那么，如果把某一个分量的幅度设成为 +1 表示信息 1，-1 表示信息 0，就可以用发射这样的一个信号来携带 n 比特的信息。在接收端，只要将信号按同样的信号基分解，判断在每一个基上信号幅度是正还是负，就可以确定出对应的某个比特信息是 1 还是 0。因此，我们所需要研究的实质性问题，还是怎样设定具有一定频带宽度和时间跨度的信号的一系列彼此正交的基。下面就这个意义给出一些特定的例子，所有这些例子都是对离散信号而言的。如同刚刚已经提到的，对于频带宽度为 B 的信号（并简化假定频率就是从 0 到 B ），可以用 $f_s=2B$ 的频率采样，将信号离散化。如果这个信号的时间长度为 T ，那么采样所得到的总的点数将是 $n=2TB$ 。

第一类基叫做 **A** 类基，它是这样获得的：如果我们对这个信号进行傅里叶变换，就能够得到它的频域表示，对应的 n 个彼此正交的基为：

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_{2k-1} = \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{T}t\right) \\ A_{2k} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{T}t\right) \\ A_{n-1} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n/2}{T}t\right) \end{cases} \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \quad (3.6)$$

可以发现，这类基的特点是，每一个基信号所占有的时间跨度都是我们所面对的问题的整个时间跨度 T ，而它们自身的规律都非常简单。如果仅使用其中的一个基，所得到的调制方式就是二相编码。而如果使用频率相同的一对基，所得到的调制方式就是四相编码。我们利用所有的基，得到的将是每一段信号可以携带 n 比特信息的调制方式。由于傅里叶变换是一种在信号处理的过程中为人们非常熟悉的方法，只要人们采用傅里叶变换，就可以截获这种方式信号所携带的信息，这可以说是使用 **A** 类基的一个缺点。因为只要噪声的特性是在某一频率附近具有较大的能量，就可能干扰对应的那个比特。

第二类基叫做 **B** 类基，它可以被看成是 **A** 类基的一个对偶：我们在时域上分解出彼此正交的信号基，它们是仅仅占有一个采样点的信号，或者说这些基就是离散的冲击信号。很显然，这些基信号彼此确实是正交的，它们的总数也是 n 个，一个任意信号总可以由这样的信号基的组合来表示。在发射信号时，如果用不同时间位置的正和负携带信息，同样可以用一段信号携带 n 比特的信息。人们可能不太乐于在工程中使用 **B** 类基，其原因就是像 **A** 类基一样，信号基中的某一个在时域上看完全是只占有一个小时间的，只要噪

声的特性是在某一时间附近具有较大的能量，就可能干扰对应的那个比特。使用 **B** 类基还存在一个工程上需要解决的问题，信号需要被同步，因为时间位置不同的冲击将表示不同的基。

显然，对于高维的信号空间，可能有很多种构造正交基的方法，如果在概念上把这两类基的特征结合起来，将有可能构造一类正交的基，其中的每一个基都在时间跨度上占据整个时间范围 T ，又在频带宽度上占据整个频率范围 B 。这样一来，对于解调方而言，在不知道对应的基的构造时，将是很难提取对应的信息的。同时，由于对于每一个基，那些能量集中在某一频率附近或某一时间附近的干扰，都将不会轻易地影响对某一比特信息的携带。只有那些能量分布恰好与所设定的基一样的干扰，才可能对获取信息起作用。

在本书 1.4 节中所提出的 **H** 信号就是这样一个可以构造新的一类基的信号。首先，该信号在时间跨度和频带宽度上都是宽的，占据了整个可利用的范围。另外，由于该信号具有一个性质，它的自相关仅在时间差为零的地方为非零，所以，如果把这个信号看成一个周期循环的信号，它与自身位移后的相关将为零。因此，我们可以把这个信号及其移位所得到的信号作为一组基信号。这就是我们所说的第三类基，把它叫做 **C** 类基。**C** 类基在一定意义上不再存在前两类基的问题，但是，在经过相关处理后，我们所得到的结果将非常雷同于第二类的原始状态，因此，使用 **C** 类基同样需要同步。由于自然界所存在的信号，很难有机会在我们所选定的时间、频率范围内呈现与我们所设定的基相同的规律，所以我们会期待噪声的影响被分布了，或者说在某一个基上出现大的干扰的机会将会比较小。所以，仅仅使用 **C** 类基中的少数几个，在限定的频带宽度和时间跨度内，噪声的影响将同前面提到过的二相码或四相码一样被分布。

我们还可以把状态搞得再复杂一点，避免使不同的基表现为仅仅是时间上的位移的状态。这就构成了第四类基，我们把它叫做 **D**

类基。为了构造 D 类的基, 让我们进一步分析 H 信号。当我们在频域上观察 H 信号时, 它在所有的频点上的分量的幅度都一样大, 但是相位不同, 且表现为随机分布。为了在数学上可以简单理解, 不妨考虑复信号, 在时间上具有 n 点的复信号具有 n 个频点。把这个信号在时间上移一点时, 等价于对各频点的分量引入一个相位随频率呈线性的移动。这告诉我们, 在第一个为 H 信号的基础上, 如果对各频点分量引入一个分布合适的相位, 就可以构造另一个信号, 它仍然为 H 信号, 却与原 H 信号正交。这样, 我们就有可能构造由不同的 H 信号组成的正交基。这里的具体做法将是任何一个 H 信号出发, 构造 n 个不同的相对相位分布, 它们中的任何一对, 都表现为相互之间在不同频点上的相位差正好是在 2π 范围内均匀分布的。

首先, 我们从数学上分析确认。设有两个不同的 H 信号, 当对它们做相关时, 不同频率分量之间的相关当然为零, 所以得到的结果将仅仅是同频分量之间的相关的总和。而对于这些同频分量, 每一个分量的相关所得到的结果将正比于它们的相位差的余弦。既然这些相位差在一个周期内是均匀分布的, 由于下列数学性质的成立, 它们的总和就是零。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \quad (3.7)$$

如果用整数 0 到 $n-1$ 来表示这均匀分布的相位差, 我们在上面所提到的要构造 n 个彼此正交的基的问题, 就成为要构造 n 个序列, 它们之间的任意两个的差总是正好是具有 0 到 $n-1$ 的所有数的序列。需要说明的是, 当我们在用整数为代表求相位差时, 由于相位的周期性, 所得到的结果应该用模 n 所得到的结果。也就是说, 如果差小于 0 , 我们需要加上 n 。 H 信号时延所获得的相位差的规律性, 在采用这里所提出的整数表示时, 可以用下列表格来表示(以

$n=5$ 为例):

0	0	0	0	0
0	1	2	3	4
0	2	4	1	3
0	3	1	4	2
0	4	3	2	1

用语言陈述, 这个规律是下一行是上一行增加一个顺序相差为 1 的序列。于是, 我们可以推想, 如果把相临的递推变化做一点规律性的变化, 也可以获得同样有效的结果, 而信号又表现为不仅仅是一个时延。利用高等代数的理论, 很容易证明, 如果把要添加的序列每次做一个位移, 只要该位移数加一个与 n 互质的数, 将需要做 n 次动作才正好返回原序列, 同时得到 n 个不同的序列, 而所得到的 n 个序列将具有我们所需要的性质: 任两个序列的差包含不重复的 0 到 $n-1$ 的全部整数。比如 (还以 $n=5$ 为例):

0	0	0	0	0
4	0	1	2	3
2	4	1	3	0
4	2	0	3	1
0	4	3	2	1

这样做得到的 n 个 H 信号所构成的正交基就是第四类, 或 D 类。它显然具有 C 类的优点, 即每一个基信号都占据了整个时间范围和频率范围。同时, 我们还可以发现, D 类基不同于 C 类基的基本点是, 它的每一个基一般不是可以由另一个基做循环时延来得到的。这个性质的效果是, 对于基的特性没有先验知识时, 对信号所携带的信息的提取似乎更加困难。由于一个基在经过时延后很少有机会还是一个基, 因此, 这样的信号在相当意义上不需要时间同步, 对一个信号的处理在很大程度上将告诉接收方时间的同步信息。

如果再归纳这四类不同的基, 可以从单个分量的频谱发现它们

的不同点。A类基的频谱是一个尖峰，B、C、D类基的频谱都是平坦的。这后三类基的单个分量的频谱差别，表现在它们的相位上：B类基的相位随频率呈简单的比例线性关系，C、D类却表现为具有随机性。如果以其中的一个基分量为基准，观察不同分量之间的相对关系，也就是上面两张表所反映的情况，C类基的相对相位随频率呈简单的比例线性关系，而D类基的相对相位却还存在一个整体的移动，是一个更普遍的一次线性关系。

为了理解这个关系，我们把这个相对相位与频率的关系连续化以后画在图3.7中，其中的横坐标表示频率，纵坐标表示相位。为了更清楚地看出问题，我们没有把相位局限在360度范围之内。有了图3.7这样的理解或说明，就可以清晰地归纳出C类和D类基的不同分量之间的互相关的结果。

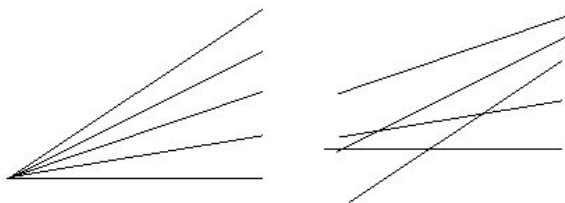


图 3.7 C、D 类基的相对相位随频率的变化

当对两个信号做循环互相关时，这个相关结果的傅里叶变换就是这两个信号各自傅里叶变换的乘积，但是在做乘积之前要将其中的一个取共轭。由此，上述两类基中的两个分量的互相关的傅里叶变换将具有这样的性质：所有频率分量的幅度相同，而相位就是这两个分量各自的相位差，也就是图3.7所表示的那样的相位，它表现为相位为一份固定的值再加上一份随频率成线性关系的分量。下面我们将分析具有这样频谱特性的信号是什么样的。当所有频率分量的相位均为0度时，信号波形是一系列余弦信号之和，而当所有频率分量的相位均为90度时，信号波形是一系列正弦信号之和，

它们的图形如图 3.8 的左图和中图所示。而当信号频率分量的相位是其他任意值时，我们总可以把它分解成前面这样两个信号的和，于是也就在一定程度上如图 3.8 的右图所示。对相位增加一份正比于频率的分量，也就是把其中的一个信号作一定的时延，相关的结果就是把图中所示的图形作一定的位移。

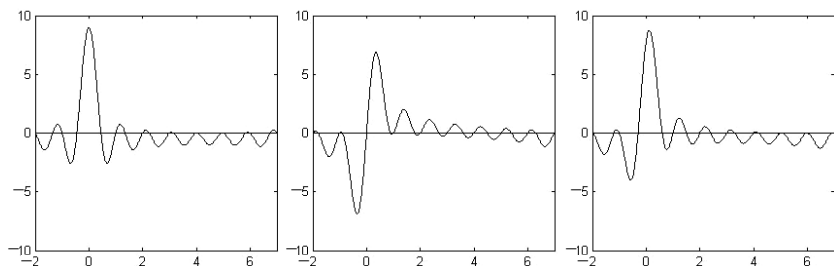


图 3.8 C、D 类基的分量的互相关

对于离散的状态，我们所用的时间都是采样周期的整数倍，也就是在图中所画的整数。观察这个图，可以看到它所反映的规律：虽然这些相关的结果并不是零，但是非常有意思的是，对于时间为整数的离散点，除了一个例外，结果却都是零，这个例外是两个分量的相位差不是 π 的整数倍。这个分析表明，只要所设定的基内的分量总数是奇数，我们所给出的任两个分量都是正交的。对于 C 类基，相关结果就是左图一种状态，也就是说，某一个分量与另一个分量经过一定的时延后是相同的；但是，对于 D 类基，所得到的相关结果几乎均属于右图的状态，即使经过时延，不同的分量之间也不会相同。正是这样一个性质，使我们在使用 D 类基时，可以不必另加时间同步信息。

引入了 D 类基，再考虑在第 2 章中陈述过的构造正交基的办法，可以归纳出更完善的利用 **H** 信号构造基的办法了。

在结束本节之前，还想特别强调的一点是，当我们使用信号携带信息时，尽管这个信号占据有一定的时间长度和频带宽度，我们

却没有把这个时间或频率资源独占。之所以会这样，其原因如下：利用信号携带信息所采用的原则是，把信号分解为具有某一分量，视这个分量上信号幅度的正负来确定所携带的那份信息是什么，而这样的具有一定时间长度和频带宽度的信号的分解方式却显然不是唯一的，分解方式的数量可能相当多。使用其中的一个方式，对于其他方式而言，某一个分量都可能被分解为多个分量。于是，在一种方式下，为了表示某一比特的信息所用的信号能量，对于其他方式而言，将被分布在多个信号分量上，在一般意义下，几乎不构成什么影响，特别在信号的维数很大时，也就是一个信号单元的时间、带宽乘积很大时。

在采用本节中新提出的调制方式时，这样的理解变得很容易实现。以频域内的多比特调制为例，我们可以使用跨度为 10MHz 的频带，发送时间长度为 20ms 的信号去携带比如 64 比特的信息。如果在计算时使用整个时间带宽的乘积，可能得到的结果将是 200000，我们可以随意地选择（在简单重复积累时，其效果是等间隔地选择）其中的 64 个分量。很显然，其他分量对于信息的携带，是不起作用的。对于采用样板，用移时调制信号，虽然从宏观上看，信号占据了整个时间和频段，但是只要其他信号与所选的样板不相关，相关积累的计算将不会给出有价值的峰值。

这样，我们实际上给出了一个复用的概念：对于整个时间长度和频带宽度，一个用户在携带少量信息时，可以只使用很小的功率，也就是说用有限的能量完成其使命；多个用户加在一起，携带大量的信息，它们的总和将需要比较大的能量，表现为该频段内的信号有比较大的功率。实际上，不考虑我们在这里所提出的信号形式，这个概念本身已经被现代民用和军用的通信所接受，并成功地予以实现了。我们只不过想说，其实可以不考虑通信信号的体制问题，如果不是所有的用户都使用可以简单地在频域内解释的信息携带方式，只要所有使用者彼此之间没有确定的关系，一个用户对于另

一个用户，其影响几乎就是一个在时域、频域内散布的背景噪声。

总结起来说，在发射信号时用信号携带信息，首先需要确定信号的时间长度和频带宽度，对于这样的信号，我们可能选择一个或多个能够构造该时间、频率域内的信号的分量，令这样的分量为一个正值或负值，就可以利用一个分量携带一比特的信息。在接收端，由于已知该分量的形式，我们所做的工作就是截取同样长时间段的信号（包括必要的同步），同时判断所携带的信息是 0 还是 1。对于后者，我们将在第 4 章中稍详细地进行分析。

3.2 信号传输中信息的携带

所谓在传输中携带信息，指发射的信号特性是固定的，接收方确切知道该信号特性，但是在信号的传输过程中，信息被加载进去，到了接收方，其目标是将这部分加载的信息提取出来。

一般说来，信号在传输过程中能够发生的变化首先是强度的衰减，这个衰减与传输的距离有关。如果认为这个因素是稳定的，不携带信息，那么，我们将不考虑这个因素。结果，可以认为信号的变化仅仅是其时间位置和频率位置的改变。因此，我们需要使用的信号应该是在处理过程中能够有效地提取信号时间差和频率移动的信号。一旦这样的信息被提取，转换的结果将是接收点离发射点有多远的信息和接收点相对于发射点以什么样的径向速度在运动的信息。这样一来，我们自然就面对另一个问题：如果由于信号传输的过程中经历了不同的途径，比如反射，信号可以由一个可以被看成很多小反射面组成的大物体的反射，于是，我们所接收到的信号将是很多份强度、时差、频移不同的发射信号叠加后的结果。如果说我们要获得信息，这个信息应该包含这些不同的强度、时差、频移。也就是说，我们需要能够分离这些信号的分量。因此，我们所使用的信号还应该是在时差、频移不同时表现为可被分离的不同信号。

当我们问什么样的信号经过不同时差后最容易分辨出对应的时差时，最简单的回答就是这个信号在时域内看是一个冲击窄脉冲。如果用离散的观点看这样的信号，就可以发现，这个信号的特点是，它的频谱是平坦的，各频率分量的幅度相同，相位也相同。当发生时延时，信号的频谱还是幅度相同，但是相位却与频率成正比，相当于相位在 2π 范围内均布，从而使它们彼此正交。要保持同样的特性，并不一定要求所有频谱的相位在没有时延时表现为同相，任何一种形式的在 2π 范围内均布，同样带来信号在时延后彼此正交的特性。因此，我们可以说，只要一个信号是 **H** 信号，它将具有与冲击脉冲在这方面相同的特性。也就是说，**H** 信号如同冲击信号，是一种可以很好提取时差信息的信号形式。

还有一种常见的频谱在给定的带宽内为平坦的信号，那就是线性调频信号。图 3.9 给出了它的频谱和自相关函数波形。可以看到，它的信号频谱基本是平坦的，如果时间的分辨率为信号频带的倒数，它的自相关函数几乎也就是一个冲击。

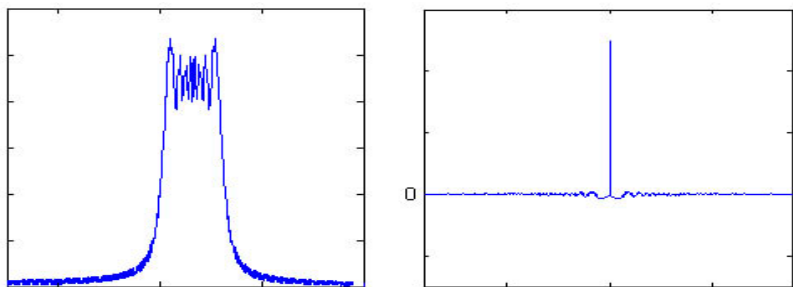


图 3.9 线性调频信号的频谱及自相关函数

如果我们关注的是提取频移信息，那么，什么样的信号可以很容易地分辨、获取频移？一个最简单的回答是在频域内看为冲击信号，也就是在时域内看为简谐振波的信号。这类简单的信号是不是存在类似于时域冲击函数那样的扩展，也就是说，表现为非简谐波、

却可以非常清晰地分辨和提取频移信息的其他信号存在呢？首先，引入一个理论分析需要的假设。由于理想的时限、带限的信号是不存在的，当我们在做时域分析时，已经无形之中假定了信号是周期的。因此，当信号发生时延时，在时间 T 以外的部分实际上是被移位后折合到时间 T 以内，然后进行计算的。考虑数学上的对称性，假设信号在频域上也是周期的，如果发生频率移动，如果移动到带宽 B 的外面，同样地把它按周期循环的方式移到频带内。这样一来，频域上的正交几乎与时域上的正交是一样的，更为宽松的是，频域信号表示可以是复数形式的，而我们一般考虑的时域信号为实数形式的。因此，我们会想到，除了频域的冲击信号外，显然还存在类似于 H 信号的信号，它在频域内平坦，而频移又非常容易检测出来。

一种可能性就是信号在时域上的移动完全等价于它在频域上的移动，这样，我们马上得到的这种信号就是线性调频信号，其调频斜率为 B/T 。是不是还有其他具有同样特性的信号呢？首先，让我们再次观察 H 信号。 H 信号具有多个频率分量，它们的幅度相同，如果它与自身的时延相关，各分量的相位将在 2π 范围内均匀分布，它们叠加的和在时间零处为零，所以导致彼此正交。统计地看， H 信号的相位在整个 2π 范围内均匀分布，如果它的多个频率分量发生频率移动，彼此相关时，各分量的相位将在 4π 范围内呈三角形分布，仍然是在 2π 范围内均匀分布，它们叠加的和在时间零处几乎为零，也就是说， H 信号在发生频率移动时与原信号基本正交。

但是，必须清醒地认识到， H 信号在时、频两维做自相关时，并不是一个只有在时差和频移都为零时才有非零输出的信号。也就是说，上述正交关系仅仅是统计意义上的。我们的分析是这样的，因为 H 信号的频谱幅度是平坦的，不管对它做怎样的时移或频移，这个特性都没有改变。因此， H 信号与自身时移或频移后的相关的频谱也必定是平坦的，它不可能处处为零。 H 信号与自身时移的相关表现为冲击，不过冲击的位置不在时间零点。如果出现如 H 信号

与自身频移后的相关不但在时间零点为零,在其他很多时间也为零的话,这个相关信号的能量必定出现在某一个时间位置上,在那个位置上成为一个冲击。也就是说,不可能有 H 信号与自身频移后的相关出现处处为零的局面。如果没有冲击出现,能量将被分散在很长时间上。

实际上,线性调频信号也是具有平坦频谱的信号,它在与自身频移后的相关表现为能量集中在一个时间上。因此,对于线性调频,移频在一定程度上可以与移时等价。而对于 H 信号,由于信号相位一定意义的随机性,这个等价被破坏掉了。

为了对这样一个概念有一个清楚的认识,不妨观察一个典型的 H 信号与自身发生各种频移时相关的两维结果的图形。图 3.10 就是这样的图形,可以看到上述解释的现象,也就是在频率移动后,相关没有出现高峰,但是无法实现处处为零。图示的信号点数为 400 点,根据下面的分析,相关结果在偏离位置 $(0,0)$ 处的平均高度应该是 0.05,可以看到的峰值高度确实很少有比 0.1 高的。但是在移频为零处,情况就很不一样,因为是 H 信号,时间偏离零处(整点处)的结果都是零。

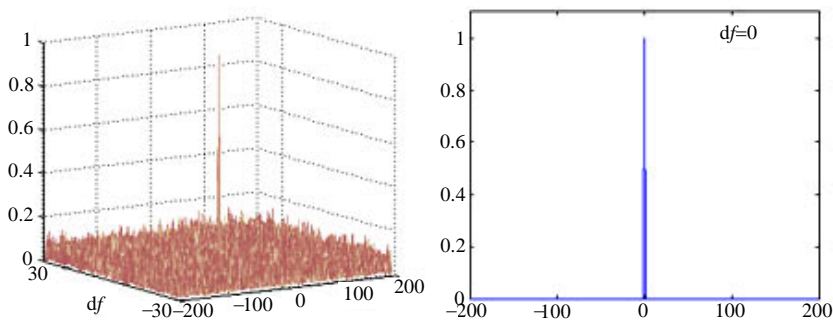


图 3.10 H 信号与自身频移后的相关结果

设计者们不必为这样的非理想状态感觉可惜,因为在所有的工程使用中,我们将面对信号加噪声的情况。当我们用无噪声的 H 信

号为样本,对发生了时移或频移的 H 信号加噪声做相关以获取时差和频移信息时,能够得到的结果是 H 信号自身相关的结果加上它与噪声相关的结果。如果统计地认为噪声也是一个频谱平坦的信号,那么相关的结果将出现一份背景噪声。根据众所周知的关系,两个信号相关的频谱的幅度等于这两个信号频谱的乘积的幅度,我们可以获得下面的基本相关属性。信号的总能量本应是所有频谱分量幅度的平方和,如果所乘的所有分量的模都是 1,那么信号的总能量将不会发生变化。设信号总共可以用 n 点表示,平均功率为 P ,总能量为 $E=nP$ 。当我们做自相关时,对于发生在整点位置处的时差和频移点,有一点的结果达到峰值,它就是 nP 的平方根,那么,在相关结果的其他时刻,它就必然为 0。而如果对于其他频移量,因为相关结果在所有时刻的幅度的平方和仍然应该是 nP ,如果没有明显的峰值,那么它在所有时刻的幅度平方的均值必然为 P 。而噪声与信号相关的结果,统计地讲,任何一个时刻的幅度的平方的均值将是噪声的平均功率。只要我们面对的信号的平均功率明显地小于噪声的平均功率,就不在乎信号自身相关所给出的非零结果。

这样,我们非常关注的一个问题就是,在采用这样的方式携带信息时,到底需要使用多大能量的信号,这与我们在前面论述的一般原则有多大差距。我们在前面已经论述过,对于相关峰的比较可靠的检测,需要大约 18 分贝的信噪比,如果再考虑相关处理所可能获得的信号时间、带宽乘积的一个处理增益,需要的信噪比将比 18 分贝低信号的时间、带宽乘积。这就是说,只要我们使用的信号时间带宽乘积大于 18 分贝一个明显的值,比如 6 分贝,总共达到 24 分贝,或绝对值 250,就可以认为,上面所论述的非理想化状态不会引起实质性的坏影响。这个结论是非常乐观的,因为对于一个具体的工程应用,我们很容易面对一个时间、带宽乘积大于 250 的局面。也就是说,我们可以认为,对于在传输中携带信息的情况,包括 H 信号在内的很多时间、带宽积大于 250 的信号都可以被认为

是一种不错的信号。

如果考虑到现实世界不是离散的，我们将面对时间差和频率差不是离散化后的整数的情况。显然，我们不必再深入考虑频率移动后的情况，因为前面给出的本来就是一个统计意义的结果。但是，我们需要考虑时间移动的状态，因为图 3.10 右图所给的是离散化后时间位置为整数时的结果，它表现为特别好，就是时间一旦错位，相关结果就是零。实际上，由于信号在时间移位后与自己相关，其傅里叶变换就是信号自身傅里叶变换幅度的平方，对于 H 信号而言，其频谱是平坦的，所有分量的相位都是零，我们知道这个信号在时域内的表现就是一个 sinc 函数，它的零点距离正好是离散化后的单位间隔。所以，当时间移动恰好为离散化后的整数时，我们看到的是相关的结果严格为零。但是，只要这个时间移动不是离散化后的整数，相关结果将不是零。大家知道，sinc 函数的起伏呈波浪形，以主峰的大小为 1，依次往外看，后面的几个峰的大小是固定的，分别为大约 0.21、0.13、0.09、0.07…可以发现，它们成为相关的栅瓣，其大小比把能量接近均匀分布时所造成的杂乱相关要大。因此，如果我们面对需要检测多个幅度不等、具有不同时差的信号叠加在一起时，消除这些栅瓣在实际上变得比寻求一个理想化的信号更重要。

由于一个信号自相关的傅里叶变换所得到的各分量的相位均为零，因此，我们可能考虑的只是它的幅度。不少人研究了窗函数对相关栅瓣的影响，我们在这里首先给出一个类似的分析，探讨对有限带宽的频谱作加权可能发生的效果。定义过渡函数 $h(m, x)$ 为

$$h(m, x) = \begin{cases} (2x)^m / 2 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - h(m, 1 - x) & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

它是一个定义域为 $[0, 1]$ 的函数，函数值从 0 过渡到 1 的函数；参数 m 为正整数，它越大，似乎过渡在开始时越平缓。过渡函数的

曲线形状如图 3.11 所示。用这个函数对频谱平坦的带限信号的频谱作加权处理，设信号带宽为 B ，对于从 0 到 $B-W$ 的范围，加权系数为 1；而对于 $B-W$ 到 B 这个范围，加权系数为 $h(m, (B-f)/W)$ 。图 3.12 给出了三个对比曲线，左面的是没有使用过渡函数的结果与使用 $m=3$ 、 $W/B=1/3$ 的结果的对比；中间的是使用 $m=3$ 时， $W/B=1/2$ 与 $W/B=1/5$ 的对比；右面的是使用 $W/B=1/3$ 时， $m=2$ 与 $m=4$ 的对比。可以看到，使用过渡函数后，相关结果的栅瓣有所减少，而观察效果，似乎采用 W/B 大一点、 $m=2$ 的效果更明显一些。

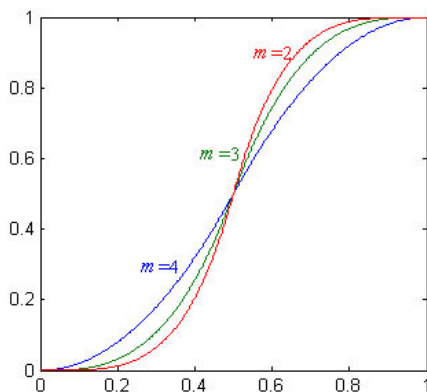


图 3.11 过渡函数的波形

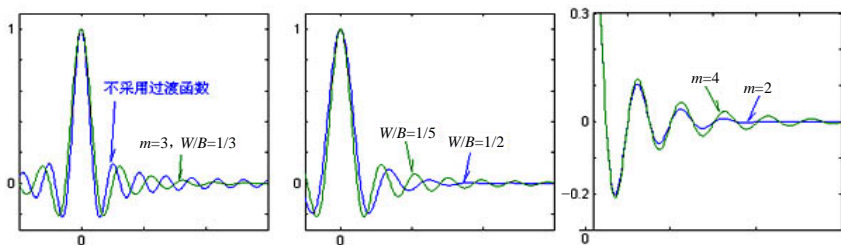


图 3.12 使用过渡函数后相关结果的对比

这里看到了一点效果，但是不能令人满意，特别是第一栅瓣的大小的减少似乎不那么明显，而大的栅瓣是我们主要想减小的对

象。探讨的办法之一是，采用计算机优化的方式来寻求答案，目标是减少最大的栅瓣。我们用这样的思路向前推进：把信号频谱设置成幅度分段恒定，比如分成 10 段。改变这 10 段的相对幅度，使相关栅瓣逐步变小。结果，可以得到一组状态，其频谱如图 3.13 左图所示，对应的相关结果如图 3.13 右图所示，其中主瓣比较窄，但可看到明显振荡的虚线曲线，为幅度完全平坦的频谱所对应的；而主瓣略胖一点，但几乎看不到栅瓣的实线曲线，为幅度分段平坦所对应的。其中从图框外部急剧下降，表现出有几点几乎等振幅振荡的点划曲线是实线曲线的放大。

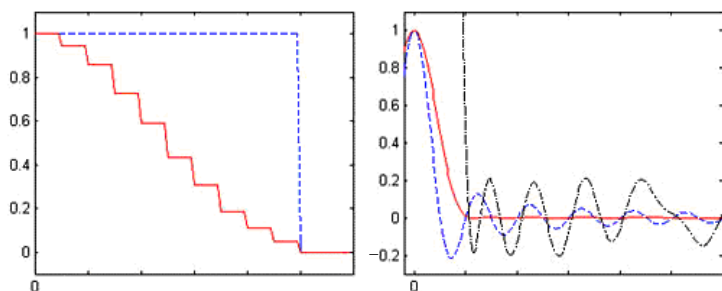


图 3.13 压制栅瓣优化的结果示例

可以看到，优化具有比较好的效果。对应的频谱相对幅度大小为 1、0.947、0.861、0.726、0.589、0.436、0.309、0.185、0.112、0.050、0，或者说实际信号的频谱幅度相对大小为（对应是上述值的平方根）1、0.973、0.928、0.852、0.767、0.660、0.556、0.430、0.335、0.223、0。由于栅瓣已经很小，在右图中，我们又将它放大了 50 倍，用点划线画出。可以得到最大的栅瓣相对幅度为大约 0.004，与 0.21 相比小了大约 50 倍，这是一个相当大的倍数，如果用分贝数表示，所有的栅瓣将小于 -48 分贝。那么，我们是用什么代价换取这个低栅瓣的呢？如果再观察图 3.13，就可以看到相关结果的实线的主峰比虚线宽了一点，特别是当我们看过零点时，可以发现点划线的第一个过零点已经是虚线的第二个过零点。不过在工

程中，很多时候这个代价是允许化的。

如果工程实现中由于各种原因而出现误差，相关的栅瓣是可能发生明显变化的。比如说，我们对上述优化后的频谱幅度做个简单的近似，认为频谱幅度由零到 B 均匀地减少到零，结果我们能得到的相关输出结果如图 3.14 的右图所示。对它略微变动，进行优化，一个可能的结果如图 3.15 所示。而如果给每个台阶处的频谱幅度相对于最大幅度不到 2% 的变化，一个可能的结果如图 3.16 所示。

对于频谱幅度连续的情况，我们采用了人工优化的途径，并且故意让所得到的结果与前面的有一点不同。但是可以看到，无论台阶式的频谱，还是变化连续的频谱，都存在一个最佳频谱，它们的频谱幅度包络形状是差不多的，得到的结果的栅瓣大小也是差不多的。

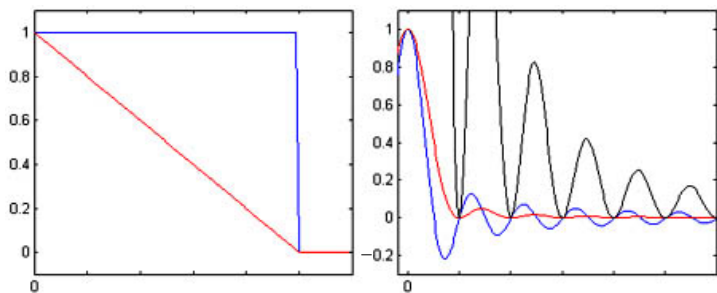


图 3.14 频谱幅度线性变化的信号及其相关结果

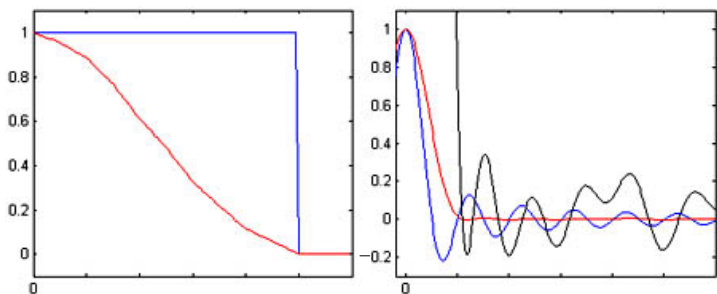


图 3.15 幅度连续的频谱优化及其相关结果

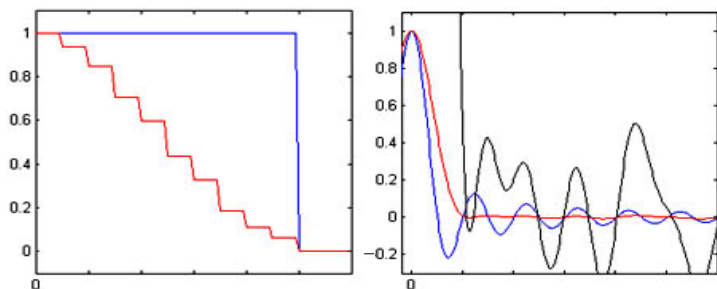


图 3.16 偏离优化状态的信号及其相关结果

从前面的几个图中，我们还可以看到，如果偏离这个最佳，栅瓣就会提高，偏离得比较多，栅瓣会比较大。考虑到工程实现的误差因素，如果我们做一个合理的估计，可以认为工程上可控制使用的栅瓣的相对大小大约为 0.01，或-40 分贝。

综上所述，可以得出：根据所截获的信号与样本的对比，提取传输过程中信号所携带的信息时，我们会考虑信号的形式问题。如果仅仅对一个单一的信号感兴趣，像 H 信号这样的在有限频带内频谱接近平坦的信号可以被使用，只要它的时间、带宽乘积比 250 大就属于比较好的信号了。但是，如果面对强度大小不同的多个信号，为了避免在实施相关处理时，出现弱信号被强信号的栅瓣掩盖的现象，需要使用频谱幅度不平坦的信号。在这样的条件下，没有频移时的相关栅瓣可以被控制在小于 0.004 到 0.01（在本书的后面还会再讨论减少相关栅瓣的窗口问题）。如果我们期望在频移条件下也有接近的状态，在那个条件下的统计的栅瓣大小应该大约为 0.0015 到 0.004，这将对应信号的时间、带宽乘积为 $(1/0.0015)^2 \approx 440000$ 到 $(1/0.004)^2 \approx 62500$ ，或为 56~48dB。在这一类应用中，我们已经使用的信号，很多并没有这么大的时间、带宽乘积，作者认为，这对于使用信号携带信息的能力，可能是有一定的制约的。

为了满足在传输中携带信息的目的，我们很自然地会问，所需要的信号至少应该有多长的时间长度，有多大的频带宽度。在前面

已经论述过对信号的时间、频率测量所可能获得的精度，根据式 (1.58) 和式 (1.59)，简单地说，时间精度将反比于信号带宽，频率精度将反比于时间跨度。因此，当我们用信号携带时间、频率信息时，确实存在时间和频带的下限，如果信号时间长度过小，或者频带宽度过小，这个使命是不能很好地被完成的。假定在一定的实现方式和信噪比的限制下，我们面对的比例系数常数可以认为是 0.3（请读者注意，不同条件下这个系数是不同的，这里给出 0.3 仅仅是一个例子），那么我们可以说，如果期望的对时间测量的精度为 0.1 微秒，那信号的频带宽度至少需要 3 兆赫，而如果期望的对频率测量的精度为 20 赫，那信号的时间跨度至少需要 15 毫秒。如果同时满足这两个要求，信号又是连续的，那么，这样的信号的时间、带宽乘积将至少是 45000，或 46 分贝。

如果我们根据信号的时间所提取的是距离信息，而且这个距离是指电磁波在接近真空的环境中传输的距离，那么 0.1 微秒的时间精度大约对应 30 米的距离精度。对于很多工程应用，我们需要的精度可能远高于这个值，比如要求为 0.3 米，那么，对时间的要求将是 1 纳秒。如果仍然采用比例系数为 0.3 的假设，对信号带宽的要求将是 300 兆赫。如果我们获得频率后是为了获得多普勒频率，进而提取源与接收点之间的径向速度，假设信号的中心频率为 1000 兆赫，20 赫的频率精度对应 6 米每秒的径向速度精度。如果我们期待的精度为 0.5 米每秒，同样假定下所需要的信号时间跨度将是 180 毫秒。如果信号中心频率再低一点，对信号的时间要求将更长。

这些粗略的估计，可以让我们体会到应用提出的严峻要求。我们希望信号具有足够的时间、带宽乘积，不仅仅是来源于我们对信号的选择，更重要的似乎来源于测量精度对我们的限制。假定信号的时间、带宽乘积很大，按前面所提的 180 毫秒乘 300 兆赫计，将是 54 兆，实际上还将面对信号处理上的困难。比较幸运的是，当我们通过同时测量信号的时间、频率来提取信号所携带的信息时，

测量结果的范围往往不是信号携带信息的能力本身所可能给出的全部。按照前面给出的（并不严格）周期循环的假定，如果信号的时间跨度为 T ，时间测量范围也将是 T ，信号的频带宽度为 B ，频移被认为是周期循环的，它的测量范围也将是 B 。但是实际上，我们大量使用的是信号的多普勒频率，它很可能远不到信号的频带宽度的量级。设想处理获得频率的中间结果就是代表频率的某个信号波形，如果它的有效频率很低，我们立即想到了可以不必需要连续的信号，而可以仅仅提供采样后的信号。只要采样的频率能够高于我们关注的最高频率的两倍（甚至并不一定要均匀采样），相关的信息的获取应该不受制约。这就提示我们，携带信息的信号可以不是连续的，它可以是脉冲制的间断的信号。

我们认为脉冲制的信号是连续信号与调制的脉冲信号的乘积，在分析信号频谱时，这个脉冲信号的频谱将是原连续信号的频谱与包络脉冲信号的频谱的卷积。如果原连续信号的频谱宽度比脉冲的频谱宽度大很多，我们将可以近似地认为，脉冲信号的频谱几乎就是连续信号的频谱。反过来，如果包络脉冲的频谱比原连续信号的频谱宽很多，我们又可以近似地认为，调制后的脉冲信号的频谱几乎就是包络脉冲的频谱在频率轴上移动了一个位置。但是，如果这两个频谱的宽度比较接近，这个卷积显然将改变信号的频谱，结果将不同于原连续信号的频谱，也明显地不同于包络脉冲频谱的平移。

由于在工程中已经大量地使用了脉冲制的信号，所以在这里做一个简单的分析。以线性调频的脉冲信号为例，如果单个线性调频的频率跨度为 3 兆，脉冲宽度为 3 微秒，重复频率为 10000 赫，那么可以计算得到的单个脉冲的信号频谱和脉冲串的信号频谱分别如图 3.17 的左图和右图所示。

首先，已经可以看到频谱包络的差别，脉冲串的包络在带内的起伏好像要大一些。其次，右图表现为实心的，实际上是由于在不

同的频率处频谱幅度不断起伏造成的，也就是说，它的频谱不是平滑连续的。这样，我们自然不能认为长时间的连续信号在采用了脉冲的方式后，所得到的使用效果会与连续信号完全一样。

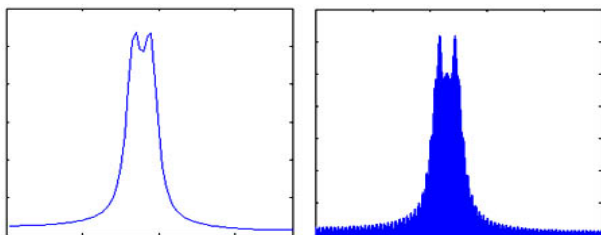


图 3.17 单个脉冲与脉冲串的频谱

实际上，我们可以这样来看待脉冲制的信号：当它与自身发生时移和频移后作相关处理时，总的结果可以看成是分段相关的叠加。也就是说

$$\int_0^T f(t)g(t-\tau)\exp(j\omega t)\cdot dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)g(t-\tau)\exp(j\omega t)\cdot dt \quad (3.9)$$

对于脉冲串信号和比较小的频移，求和式中每一个积分的指数项基本没有发生变化，于是可以把它提到积分外面，成为

$$\int_0^T f(t)g(t-\tau)\exp(j\omega t)\cdot dt = \sum_i \exp(j\omega t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)g(t-\tau)\cdot dt \quad (3.10)$$

它告诉我们，信号的相关就如同把中间没有信号的部分去掉后相关，把各部分的结果叠加起来就是了。不同的是，如果信号真的只有各脉冲宽度的总和时，信号的总时间跨度比较小，在测量信号频移时将不可能给出必要的精度。而一旦成为脉冲形式，由于各段相关后的结果在叠加时有一个相移因子，它与脉冲的绝对的时间位置有关。如果信号发生频移，公式所提供的相位差将与信号总的的时间跨度有关。当时间跨度足够长时，这个相位的作用就很明显了，从

而可以保证频率测量的精度。

假定脉冲是等间隔的,那么,式(3.10)右面求和中的指数项将表现为一个类似于正弦信号被均匀采样后的结果。这个指数项的特性,在两个脉冲之间有差别,这个差别完全由它们之间的相位差决定,而这个相位差是脉冲的间隔时间与频移量的乘积。由于相位差表现为周期信号,增加 2π 所表现的效果是没有发生变化。当频移量增加脉冲间隔的倒数那么大时,我们就面对相位差好像没有发生变化的结果。也就是说,计算频移的判断将发生模糊,我们能够确切获取的频移量的变化范围具有一个最大的不模糊区间,那就是脉冲间隔的倒数。在我们期待的频移范围小于这个脉冲间隔的倒数时,可以接受脉冲以这样的等间隔出现。如果所期待的频移范围大于脉冲间隔,就必须采取一些变动或安排,要么减少间隔,要么不采用固定间隔,使我们有可能消除模糊。需要说明的是,非固定间隔并没有我们想象的那么好,它在实质上并不能非常有效、或比较多地扩展频移不模糊的范围。

3.3 多用途状态下信息的携带

所谓多用途状态,是指信号同时兼作多用,或者说所谓的随机性的参考可能有多个,从一个意义看的随机性,为那个意义条件下的信息携带创造条件,接收时提取这样的随机性,就获得该意义下所携带的信息。这种多用途可以是在发射时同时携带多重信息,或者在发射时和传输过程中分别携带信息,也可能是在不同的传输过程中对不同的接收者携带不同的信息。它的最大特点是,采用不同的接收、提取方式,将获得不同的信息。

所谓一个信号多用,无非是同样的发送,但是被不同的用户接收,根据它们各自期待得到的某种不确定性成为确定的解释,提取各自想得到的部分信息。显然可以把它分解为三大类型:第一类是对不同的用户都在发射时携带信息;第二类是对不同的用户都在传

输过程中携带信息；第三类是对不同的用户都是同时混有在发射时携带信息又在传输过程中携带信息。对于不同用户属于同一方式的信息携带，如果我们选择信号的形式，至少优化的目标是一致的。

对于在发射时就携带信息的情况，下面以两个用户的状态来分析。如果一开始就设计发射是给两个用户服务的，就有可能采用下列的方式：把向两个用户传递信息的速率设成相同，对于每一段信号，由于要向两个用户各发 1 比特信息，合起来，实际上是发送 2 比特信息；对于接收者，虽然它们均可能接收到这样的 2 比特信息，但是，由于实际上只需要提取出其中的 1 比特，因此，对信号并不需要携带 2 比特信息所必需的基本能量。这里，设计接收机的复杂性就在于，对于某一个接收机而言，它需要积累信号，但对于传送给另一个用户的不同信号状态，它必须视而不见，作有效的积累。当然，还有一种可能性就是，发送方在发送时关注的就是 0 和 1，与用户是没有关系的，至于同样的 0 和 1 在被提取以后，可能反映不同的信息。这可以被理解为信源编码，或通信加密。由于本书并不讨论这方面的内容，所以我们就不再深入。

一个简单的例子可以反映这种一个信号两个用户的状态。信号实际上是四相编码的，每一个码元时间内，发射的实际上是 (0,0)、(0,1)、(1,0)、(1,1) 中的某一个，占据两比特。但是两个不同的接收机在接收时，对应这两比特信息，却再次做积累，分别提取前一比特和后一比特。

对于在传输中携带信息的情况，我们所采用的信号，比较适合于这种用途，对于发射者而言，基本上也不存在单用户与多用户的差别。信号一旦离开发射者，可能遇到各种反射目标，对于那些离接收者比较近的目标，发射部分的强度相对比较大，信息容易被提取出来。因此，可以说，对于那个具体的接收者而言，信号主要是用来携带对应的、离它比较近的目标的信息的。这样，本节下面要展开讨论的，也就是既想在发射时就携带一定信息，又会在传输途

径中再携带一部分信息的状态。

回顾前面两节的内容，试图对比已经论述的两种携带信息的方式，可以发现，它们既有相同，也有差异。用比较长的时间观察信号，不妨把信号看成是由一段一段的子信号合成的。对于发射时就携带信息，段与段之间必然存在随时间的变化，这个变化在一定意义上代表不同的信息内容。而对于传输中携带信息，我们很可能发射随时间稳定的信号，利用多段的主要目的是为了达到所需要的时间跨度，我们想感知的是传输过程带来的变化。但是另一方面，如果我们观察信号的频谱，前者反映信号的频谱随时间变化，若干段的总和是不同的，一般随时间变化；而后者却很可能（但不是必须）其信号频谱不随时间变化，同样多的小段的总和都具有某种意义最佳的样式。不过，更确切地说，我们需要后者的频谱稳定，仅仅是出于能够获得一个比较好的处理特性。这种稳定并不是严格地要求频谱不能有变化，而只是说，信号频谱的幅度包络最好是某种固定的形状。

可以说，由于问题在设定时的不确定可以根据用户不同而有不同，从而导致一个信号可以同时携带不同的信息。但是，我们是否也可以说，有可能找到对两种不同方式携带信息都可能非常有效的信号波形呢？一个很容易设想的状态是，信号由同样时间长度的一段一段叠加构成，每一段又代表一个码元长度，如果每一段信号在做频率分解后具有相同的频谱幅度，但是不同段所有的频率分量之间的相位差为某个定值，它可以取 $2\pi/m$ 的整数倍。对于在发射时携带信息而言，虽然信号并不是单频的，根据我们对信号描述的论述，它在一定程度上也只是占据了某种描述的一个维，相当于使用单个频谱的信号，并采用了 m 相编码的方式；而对于在传输中携带信息的方式而言，这表现为一个周期循环的样板，每一个周期信号频谱幅度是相同的。

对于这样的设定，如果码元的相对长度比较长，我们用一个码

元长度的时间为后一种信号携带信息的样板长度,那么就有可能对两种方式都获得比较好的效果。另一方面,如果码元的相对长度较短,或者说我们在采用传输中携带信息时采用了多个码元长度的时间作为样板的时间长度,就需要对样板的频谱进行估计考虑。在使用时,我们可能采用不同的方式使用这样的分段构成的样板。第一种方法是,使用样板前,在接收时采用了一个 m 倍的倍频装置,由于每一段信号的各频谱分量的相对相位都被扩大了 m 倍,相对的相位差成为 2π 的整数倍,也就是信号的每一个码元之间的相位差将消失,发射时所携带的信息被取消,信号变成规范的周期重复的信号。第二种方法是,先提取发射时所携带的信息,相当于我们可以知道每一个码元的相对相位,根据这个相对相位,我们就具有了确认的长时间段的样板,可以用做提取传输过程中所携带的信息。或者我们另有途径,本来就可能获得这样的由很多个码元所组成的样板。

对于上述的后一种方式,我们会关注由多个码元组成的样板的频谱。由于把信号看成是一个码元的信号被延时和移相后叠加的总和,相当于一个码元的信号与发射时所携带的信息所对应的信号的一个卷积,因此它的频谱应该是一个码元的频谱与那个发射时所携带的信息所对应的信号的频谱的乘积。对于这后一个信号,它是由一系列的信号叠加构成的,其中的第一个为简单的、时间位置在零的冲击,它的频谱是平坦的,所有分量的相位为零。以后的各分信号,由于时间位置不同,其频率分量的相位相对于第一个有一个随频率线性变化的增量,还需要增加构成码元的、各频率分量相同的一个固定相位移动。这样叠加的结果,只要包含多个码元,这一信号的频谱就表现为随机的起伏。因此,在这种情况下,样板信号的频谱将表现为在码元频谱的基础上,幅度出现接近随机的一种调制。

如果出现上述情况,对于获得比较好的相关特性,也就是上一节所分析的低相关栅瓣特性,应当说是不利的。换句话说,当我们

需要用一个信号为不同用途携带信息时，以传输过程携带信息所采用的样本长度比较长时，很可能导致携带的效率下降或性能变差。

但是另一方面，一个信号如果被用来在发射时携带信息，它必然具有某种随机性，不管是否出于发射时的意图，它肯定能够部分地被用作传输时携带信息的方式来实际上携带信息。如果信号就是一个频谱接近均匀分布的随意的噪声，或者说，从统计的观点看，我们可以这样对信号做一个模型，那么，就会发现，在计算无频移和有频移的相关时，将得到一个接近于图 3.10 那样的结果。如果信号的时间带宽乘积为 TB ，信号将具有 $n=2TB$ 点，如果信号的总能量为 W ，那么在频移为零、时差为零的位置，相关输出的是信号的能量 W 。而在所有其他的位置，信号能量将被分散。因为信号将具有 $n=2TB$ 点，可以统计地认为，相关栅瓣的大小为 W/\sqrt{n} 。只要时间带宽乘积足够大，我们一般仍然可以得到良好的栅瓣特性。这个简单的分析告诉我们，不管发射信号的目的是什么，在传输中携带信息的模式似乎总可以被人们利用，而且效果并不会很差。也就是说，信号一旦被发射，即使不是有意的，也在携带着信息。

更一般的情况，一个信号有它本来的用途，但是如果有用户要利用它，让它在传输过程中携带信息，比如对反射该信号的目标进行定位，在实践中总是可行的。其原因，是因为一个信号一旦发射，它总表现为信号在时域和频域上具有某一个位置，而在接收点，这些位置的变化总是可以检测的，其结果，这个信号总是被用来携带这样的信息，而它们在经过处理后，又总可以变成辐射源或散射体的位置信息。

第 4 章 信息的提取

一个信号在到达接收机后，已经是承载了信息的，本章将分析怎样从这个具体的信号中，提取想获得的信息。由于信号具有两种基本的携带信息的方式，这里也将从不同的角度分析不同的提取信息的基本方法。当一个信号可以同时携带不同信息时，我们可能分别处理，以便分别得到不同角度看的信息。如果接收方与发射方是无关的，我们将处于一种盲目分析的状态，处理的第一步是力图获取信号的码元或样板，把问题在一定程度上转化为双方是配合的，从而可以下手实施对信息的提取，因此，我们还将分析在信号为非配合时怎样分析信号的码元或怎样提取信号的样板。

4.1 对发射时携带信息的提取

根据第 3 章的叙述，信号在被发射时就携带信息，其基本方式是当信号用某种特殊的方式描述时，对于其中的某一维或多维，其幅度的大小或大小的比较将表示所携带的信息。有了这样的基本理解，实际上就已经提出了对这样携带的信息进行提取的基本途径或办法。

开始进行信息提取工作的前提是了解信号在使用时所采用的描述方式，对被接收的信号采用同样的方式描述，得到各维的幅度。这里所讲的信号在各维上的幅度，并不一定要求是对所有的维的，因为在使用信号携带信息时，可能就没有利用所有的维，有可能只是用了一维、二维或数量非常少的若干维（根据第 3 章，我们知道当携带的信息是同时对几个用户时，一般将需要多维）。因此，这里所讲的描述信号的方式，虽然也可能指所有的维，但更多的时候

仅仅需要获得对其中感兴趣的一维、二维或数量非常少的若干维的幅度。接下来,自然是对所得到的幅度的一个直接提取,它可能是有无的判断,可能是相对大小的判断,也可能是相对于信号平均功率的一个量化的具体结果。最后,当然是对所提取的幅度信息的一个翻译,把它折合成一个明确的信息。对于这样一个过程,可以用图 4.1 所示的流程方块图来表示。

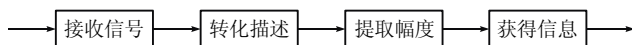


图 4.1 提取发射时信号所携带的信息的流程方块图

其中的转化描述这一部分,其功能是把信号由自然的、在时域内流水连续存在的方式转换成具体应用承载信息时所使用的方式。根据第 1 章对信号描述方式的论述,我们可以这样来理解可能使用的描述:设信号的时域描述为一个特定的描述,用 n 维矢量表示为 \mathbf{A} ,而我们使用的描述为另一个特定的描述,表示为另一个 n 维矢量 \mathbf{B} ,它们之间的联系为转换矩阵 \mathbf{Z} ,也就是说 $\mathbf{B}=\mathbf{Z}\times\mathbf{A}$ 。对于 \mathbf{B} 中的某一个元素,也就是信号在新描述方式下的某一维的幅度,应该是 $\mathbf{B}_i=\mathbf{Z}_i\times\mathbf{A}$ 。这个结果的物理意义是,转换后的信号的某一维的幅度,是原信号通过某个特定的滤波器后的响应。从公式表面的意义理解,如果我们同样地离散地观察信号,这个滤波器是一个一般的 n 阶的有限冲击响应滤波器。这样,我们可以明确地说,所谓的转化描述,就是一个滤波的过程,或者突出过程的物理意义,转化描述就是提取信号某个特定描述维的幅度的一个滤波过程。

需要说明的是,这样一个滤波器原则上讲是有连续输出的。但是,当使用上一段所给出的公式时,它是以信号时域上的 n 点为一个基本单元的,输入是这样的 n 点的集,但需要的输出却可能只是一点。因此,我们一般并没有利用所有的滤波器输出,而仅仅使用了滤波器输出时某一个特定的时间位置上的一点。也就是说,下一个功能方块中的幅度提取将表现为仅仅提取滤波器输出的时间流

中的某一点的信号幅度。

如果仅仅使用特定描述中的数量比较少的几维，那么，将没有必要构造与总维数对应的那么多数量的滤波器，而仅仅只需要构造与相关的几维对应的少数几个滤波器。更需要特别指出的是，不同维的基本描述可能就是某一个维的循环移位。也就是说，代表某一维的基本方向矢量是一个时间函数，但是其他方向矢量的时间函数就是这一个函数在时间轴上循环移位的结果。在这样的特定条件下，所构造的滤波器的系数是一套相同的数，不过它们的相对位置是某一套的循环移动。那么，在实现上，就可以仅仅构造和使用一个滤波器，不过对不同维的结果，我们提取滤波器输出不同时间位置点的值。这样一来，提取信息的接收系统中，可能只有一个滤波器。

在提取了我们需要的某些维的信号幅度后，获得原始信息的方式就比较简单了。如果参考是所有幅度的平均电平，我们甚至可以不考虑变换以后的结果，而直接使用变换以前原始的、用时间维描述的信号的平均电平，因为两者将是相同的（假设变换是保信号能量的）。而如果参考或比较的是某两维的相对状态，我们只需要将这两个幅度相减，然后判定结果的正或负就是了。

根据这样的论述，可以说，所有的提取信号在发射时所携带的信息将可以采用同一方式的提取装置，这个装置就是具有匹配滤波器和幅度检测的接收机。这样的说法似乎太简单了，但是事实就是这样，工程中出现的各种变化仅仅是实现上为了方便而引入的。为了更好地理解这里给出的总结，下面将给出对一些常见的这一类接收机的原理性的解释。

常规的调幅信号，在接收时只要对准信号频率，在一定意义上说，就是采用一个简单的带通滤波器为通道的滤波器，然后检波取出信号幅度，就获得了发射时所承载的信息。常规的调频信号，只要使用一个幅度响应随频率呈线性关系的滤波器，一般同时要除去

有用频带外的频率分量，然后对通过的信号检波，就获得了发射时所承载的信息。可以说，它们都是非常简单的滤波器。对于数字通信，用相关处理来接收。以简单的移频键控为例，所使用的匹配滤波器应该是两个通道的，分别针对两个不同的频率。对信号获得同步，就是在合适的时间位置提取两个通道的输出。比较这两个通道的输出大小，获得结果是 0 或 1 的判断，完成了对信息的提取。

在没有数字技术以前，有可能实现的滤波器，往往是一些非常规范的滤波器，比如带内响应平坦的带通滤波器、带内响应近乎线性的带通滤波器等。因此，我们对信号的描述也不能随意，相对地都比较简单。但是，采用数字技术，就可以随意地构造所谓的匹配滤波器，于是可以设想，对信号的描述几乎可以采用任何可能想象的方式。特别是，如果我们所用的体制仅仅利用信号描述的某一维或两维来承载信息，我们关注的、或者需要实现的，也仅仅是对这样一两维的匹配滤波器，它们在实现上不需要很大的代价。更清楚地说，这样的匹配滤波，也就是实施对所接收到的信号与样本码元信号的相关处理。这样，一个提取在发射时所携带的信息的接收机的最小基本组成又可以用图 4.2 所给出的方块图来表示。

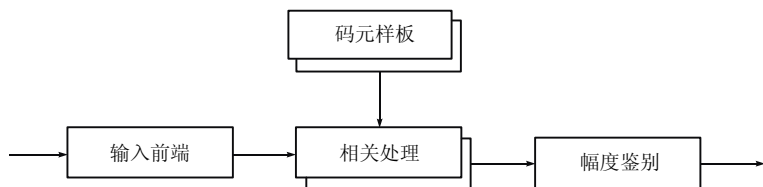


图 4.2 提取发射时信号所携带的信息的接收机组成

让我们举一个例子来增强对这样解释的原理的理解。设我们用一段噪声为码元样本，采用二相编码的方式，仅仅使用信号构成的这一个特殊的维，以每个码元的时间长度传送一个 0 或 1，对应的信号分别就是这样的一段噪声或将它正负颠倒的噪声。图 4.3 给出了这样使用时的一段信号波形，经过相关处理后的直接输出，在经

过自动增益处理后用这个信号触发一个双稳态电路给出的输出，它们清楚地表示了原始信号、相关结果和输出信息之间的关系。为了减少计算量，我们仅仅使用 40 点的码元长度，所以相关处理后的噪声似乎相对比较大一点。随着一个码元的时间、带宽乘积加大，处理后噪声的相对大小将会减少。

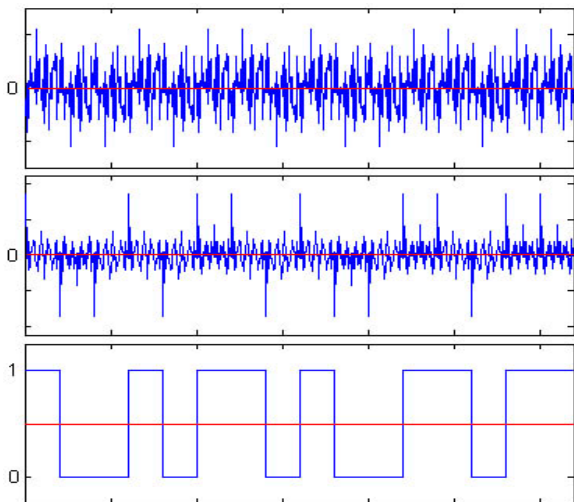


图 4.3 采用噪声携带信息的典型波形

有了上述解释，我们很清楚，完成信息提取的前提是需要先知道信号用来承载信息时所使用的信号描述方式，当然我们仅仅需要知道的只是用来携带信息的那些维的具体形式，而不必知道信号用包括那一维的所有高维表示的全部形式。

如果发射和接收双方是配合的，码元的样板可以预先约定，实现这样的信息提取将不存在原理上的障碍。对于一个具体的应用，假设我们传输信息的速率为 R ，而所使用的信号码元的时间、带宽乘积为 TB ，这就意味着我们需要在 $1/R$ 的时间内，完成 $n=2TB$ 点的相关计算。由于 $R=1/T$ ，计算的速率应该是

$$f = 2TB \cdot R = 2B \quad (4.1)$$

也就是说, 计算速率仅仅与所使用的信号带宽有关, 而与信息传递的速率无关。那么, 需要一定的带宽是干什么的呢? 带宽的增加可以提高相关处理的增益, 但是同时, 带宽的增加将增加进入通道的噪声的功率, 因此, 带宽对接收机的灵敏度也没有贡献。单纯从这个意义讲, 应尽可能使用小的信号带宽, 因为它可以减少对计算速度的要求。不过当我们回顾对信号的描述时, 时间、带宽的乘积反映了描述信号的维数, 增加带宽的结果是增加信号可能的维数。如果我们使用一维来实现一个用户需求的对信息的携带, 那么, 高的信号维数表明, 可以同时在一个频率范围内为多个用户服务。这样, 我们看到了另一个基本的关系: 在同一个频带内, 可以同时使用的总用户数量与信号码元的时间、带宽乘积正比。再次使用关系 $R=1/T$, 也就可以说, 可以同时使用的总用户数量正比于码元信号的带宽与信息传输速率的比值。或者再换一种说法, 不管实际上使用了什么样的信号带宽, 一个使用信号传输信息的用户, 等效地将占据正比于 R 的一定频带宽度。这表明, 对于给定的信息传输速率, 为了增加同一频带、同一时间内总用户的数量, 将需要提高码元信号的带宽, 而为此付出的代价是加快相关处理计算的速度。再说得明白一点, 不同用户使用不同的点频, 在一定意义上允许运算速率低一点, 而多个用户使用同样的一个频带, 在获得一致性的同时, 付出的代价是运算速率必须提高。值得庆幸的是, 随着数字技术的发展, 速率问题对于工程实现某个具体的应用, 基本上不是障碍。

如果发射和接收双方是非配合的, 接收方事先没有码元的样板, 为了能够完成相关处理或匹配滤波, 就需要首先获取信号的码元样板。而且, 如果所采用的信息携带使用了信号的多维, 对对应样板的了解也同样应该是多维的。

首先假定使用带噪声的样板做相关, 可能获得什么样的结果。设信号为 $f(t)$, 样板为 $h(t)$, 噪声为 $n(t)$, 且不妨假设噪声与样板是

正交的（任何信号都可以被分解为一个 $h(t)$ 分量和一个与它正交的分量的和，我们不关注 $h(t)$ 分量）。所谓相关，实际上是求信号在样板方向上的投影的大小，当样板与噪声同时存在，且被我们当成样板时，所求出的将是信号在样板加噪声方向上的投影的大小。记

$$\frac{\int f(t)h(t) \cdot dt}{\sqrt{\int h^2(t) \cdot dt}} = A_1 \quad (4.2)$$

那么

$$\begin{aligned} & \frac{\int f(t)[h(t) + n(t)] \cdot dt}{\sqrt{\int [h(t) + n(t)]^2 \cdot dt}} \\ &= \frac{\int f(t)h(t) \cdot dt}{\sqrt{\int h^2(t) \cdot dt}} \frac{\sqrt{\int h^2(t) \cdot dt}}{\sqrt{\int [h(t) + n(t)]^2 \cdot dt}} + \frac{\int f(t)n(t) \cdot dt}{\sqrt{\int n^2(t) \cdot dt}} \frac{\sqrt{\int n^2(t) \cdot dt}}{\sqrt{\int [h(t) + n(t)]^2 \cdot dt}} \\ &= A_1 \cdot \sqrt{\frac{(S/N)_0^2}{1 + (S/N)_0^2}} + A_n \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + (S/N)_0^2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

这表明，有噪声时的投影为无噪声时的投影和信号往样板正交方向的投影的加权叠加。如果认为信号本身不包含任何与样板正交的分量，那么，信号往样板正交方向的投影就等于零。在信号本身包含噪声时，可以认为 A_n 就是信号中的噪声往样板正交方向的投影，或者近似地认为，就是信号所含起作用的部分噪声的大小。也就是说，可以近似

$$A_1 / A_n = (S/N)_s \quad (4.4)$$

可得

$$\frac{\int f(t)[h(t) + n(t)] \cdot dt}{\sqrt{\int [h(t) + n(t)]^2 \cdot dt}} = A_1 \cdot \left[\sqrt{\frac{(S/N)_0^2}{1 + (S/N)_0^2}} \pm \left| \frac{1}{(S/N)_s} \right| \sqrt{\frac{1}{1 + (S/N)_0^2}} \right] \quad (4.5)$$

这个式子表明，由于样板存在噪声，相关的结果首先是变小，然后还要加上一份起伏。变小的程度与样板的信噪比有关，这个信噪比越小，变小得越厉害。叠加的变化量反比于接收到的有效信噪比，而且与样板的信噪比也有关，信噪比越小，这个起伏越大。图 4.4 给出了这个变化与两个信噪比的关系，曲线以样板的信噪比为自变量，以接收到的信噪比为参变量。图中，自变量样板信噪比以分贝为单位，给出了-10 到+10 分贝的不同状态，参变量接收到的有效信噪比也以分贝为单位，从外往里为 0 分贝起，每条曲线递增 2 分贝。

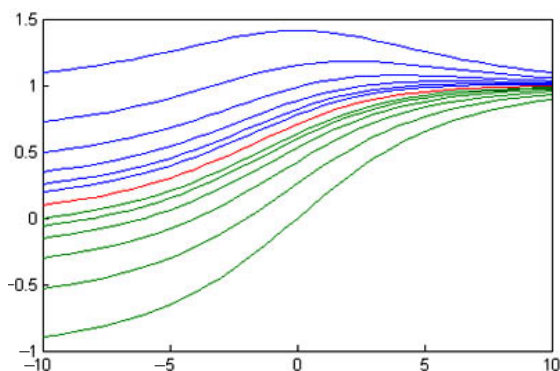


图 4.4 有偏差的相关结果

由图 4.4，可以看到，如果接收到的信号所具有的有效信噪比较高（比如大于 6 分贝），相关结果的起伏不是很大，结果基本上为最中央的曲线所在位置。而在这样的状态下，只要样板信噪比高于 5 分贝，相关的损失并不很明显。特别在样板信噪比高于 10 分贝时，结果基本与我们手头具有理想的样板是没有多少差别的。

因此，我们可以说，只要能够得到信噪比高于 5 到 10 分贝的样板，对于提取发射时信号所携带的信息，其效果与收、发双方配合基本上是差不多的。但是另一方面，如果样板信噪比低于 0 分贝，0 分贝的接收到的信号的信噪比已经很难保证输出总是大于零的。样板信噪比更低，要求接收到的信噪比更高，显然是不合理的状态。

假定信息是被离散化后用数字方式携带的，那么发射时的信号被看成是一段一段的码元。在非配合时，我们对码元长度和它的同步位置也是未知的。如果具有一段高信噪比的信号，但是码元的时间长度和位置有一定偏差，我们也可以把它看成是样板的信噪比不那么高。设正确的码元长度为 100%，位置不正确或长度不正确都可以被看成是引入了一段内容不正确的样本，设它所占的时间长度为 $k\%$ ，再假定信号是统计平稳的，那么，这几乎可以等价于信噪比为 $100/k$ 。探讨样板的信噪比分贝数与 k 的绝对大小的关系，可以得到如图 4.5 所示曲线。该图的自变量参数为 k 值，而参变量为长度和位置均正确时的样板的信噪比值；最上方的曲线为原信噪比无穷大时的结果，其余给出的是原信噪比在 10 分贝附近间隔 2 分贝的 5 个结果。在图中，我们还用黑色的点标注了使信噪比等效降低 2 分贝（也就是比最上面的曲线低 2 分贝）所对应的位置。根据图 4.5，我们可以说，5% 的长度误差基本上也是可以容忍的。于是，我们还可以总结说，在获取样板的过程中，也不一定要求对码元的长度和位置的了解是非常精确的。

这样，对于采用数字方式携带信息的情形，尽管在非配合的条件下，我们没有理由说总可以获得足够好的样板，但是却可以用下列的方式去获得相对能够令人满意的样板：首先企图获得码元信号样板的长度，然后用这样的长度去截取信号，通过试探，发现码元的同步位置，然后再通过相互比较，获取一定数量的同样的码元，最后，叠加这些相同的码元，得到相对说来信噪比较高、时间长度比较准确的码元样板。于是，在很多情况下，我们可以达到一种

自跟踪的效果，也就是经过一定的时间，我们似乎总可以得到需要的信号样板（当然前提是这个样板没有随时间变化）。

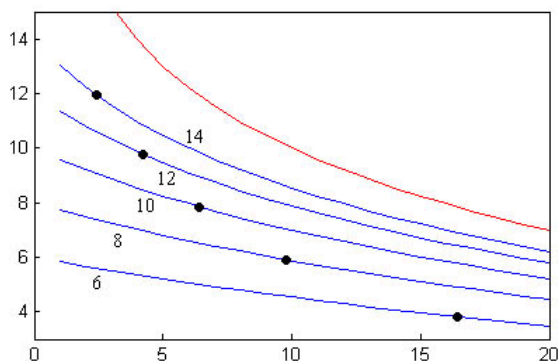


图 4.5 码元长度偏差的效果

对于仅仅使用信号描述中的一维，并采取反相分别表示 0 和 1 的应用，这个过程就有可能相当简单。因为只要我们取信号（原始的或处理后的）的绝对值，就可以把这携带的每个码元 1 比特的信息丢掉，使每一码元都变得相同。现在，只要我们做自相关，就可以比较好地得到明确具有周期的相关峰，而这个周期之一，就是实际的码元长度。接下来，就可以用这样的码元长度，截取一段信号为样板，去发现在一个长序列中，有若干个与抽样的码元同样的部分。将这样的不同的小段对齐后叠加，就可以在一定程度上提高信噪比，得到相对比较好的样板。

具体运算时，这样的方法当然需要被修正。举一个例子来说明，如果信号是一个二相的移相键控信号，如图 4.6 左上图所示（局部放大）。在添加了噪声后成为中上图的样子。对它取绝对值后，计算信号频谱，结果如右上图所示。于是，我们很容易得到信号的频率，具体的值为角频 0.7304（真值为 0.73）。接下来，我们就可以通过滤取该频率附近的频谱部分，明显地提高信噪比。用一小段这样的单频信号的正弦和余弦为样本对信号做滑动相关，得到信号相

位随时间变化的特性，如左下图所示。它的一个局部放大，如中下图所示。根据前一张图，我们用直线标出，可以发现试探所用的频率略微高了一点，其量值大约为 $4/10000$ 。如果我们修正这个值，得到的角频值将是精确的 0.73 。而根据后一张图，可以看到码元长度为 50 （真值就是 50 ）。如果再返回去处理前面的结果，不但可以获得相当好的码元样本，而且可以获得信息提取的结果，部分的结果如右下图所示。

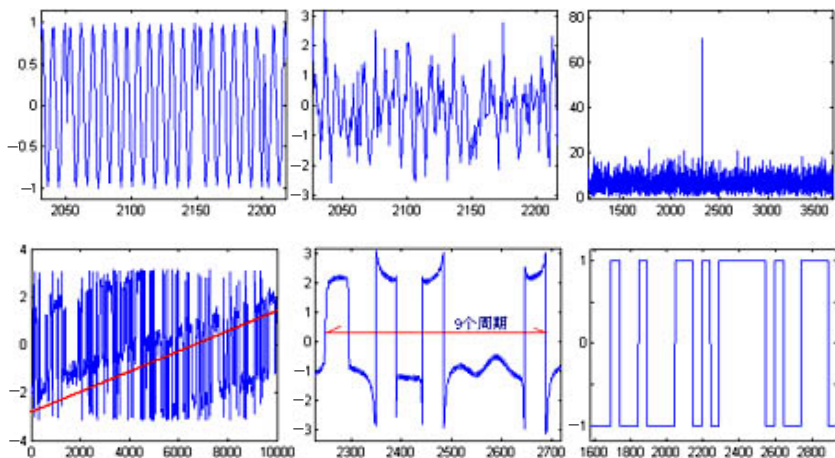


图 4.6 寻找码元样本的过程

类似的过程可以求出一些其他的方法所使用的信号码元样板。然而，所有上面的分析和论述，都基于一个假定，那就是在一种信息携带方式中，我们对信号的描述是一种固定的，它不随时间发生变化。但是，真实的携带，这样的假定是不必要的。描述方式可以仅仅在一段时间内是固定的，它可以随时间段跳变。代数的研究告诉我们，采用非常简单的规律，可以得到非配合者极难截获的变化。伪随机数的产生、混沌现象就是这样的一些例子。于是，对于在发射时携带信息的方式，发射与接收方可能事先协同，约定采用分段

的方式携带信息，其中每一段的信息包括两部分，一部分是有效信息，另一部分却是导引下一段具体方式的信息。这样一来，宏观地看，这个信号的规律性很差。对于非配合方而言，获取码元样板的难度就极大地提高了。信号描述的方式甚至可以不断地随时间改变，发射和接收双方可以事先约定这种慢变化的规律，它不是需要传输和携带的信息，但是可以用来解决信息的携带和提取。对于这样的应用，我们可能会发现，信号几乎没有码元这样的概念，非配合的提取信息的难度更加增大，几乎成为不可能。所以我们仍然可以得出结论说，提取发射时所携带的信息，是以了解信号携带信息所使用的描述方式为前提的。

熟悉通信的人会有一个疑问，几乎所有的通信，客观上都有一个时间同步和频率同步问题，为什么需要这样？其实道理并不难理解。我们在用图 4.2 叙述提取信息的基本方法时，其中总是包含一个相关处理，它的功效实际上是对携带信息时所做的处理的一个反处理。如果用线性网络通道来理解，携带和提取这两个处理应当是互逆的。然而，实际的处理是在两个不处在同一位置的实体独立地进行的，因此，它们应当具有相同的时间尺度和时间位置。更有甚者，在这类应用中，由于电磁波的传输需要时间，信号到达目的地的时间并不是其发射的时间。这样一来，我们就必然需要时刻确定发射和接收两者的时间、频率处在计算需要的合理位置上，而这就是时间和频率的同步。

或者更直接地说，只要我们采用数字电路计算，所谓的滤波或相关，实际上总是把信号看成周期可循环的，计算仅仅取其中的一小段，采用循环卷积完成相关。而一切循环卷积的计算，总有一个正确的跨度和范围截取的问题，如果它们不正确，计算的结果将发生差错。为了保证计算的“原料”是从连续的时间长河中正确截取的，我们要做的，也就是时间和频率同步。

4.2 对传输中携带的信息的提取

如果确切地定义本书中所论述的在传输中携带信息，那么它并不是指信号在电路中怎样传输，也不是指信号在空间怎样传输，而是指信号在传输的过程中，遇到某一个单元，这个单元接收信号，通过一个变换，再返回信号，由这个单元所在的位置或这个变换改变了信号，借此在信号上携带了一定量的信息。当然，最简单的就是这个变换是将信号原样返回，或者仅仅在幅度上返回了一小部分。由于电磁波的传输需要一定时间，因此，这样的返回已经携带了返回点在哪里的信息。目前只有一小部分应用是把信号做了人为的明显变换，然后重新有意发射出去的，但是我们会说，这是一种更一般意义的在传输过程中的信息携带。

在上一章中已经说明，以这样的方式携带信息，最基本的形式是表现在信号的时间位置，或者还有它的频谱的频率位置，会发生某种变化。因此，在这种方式下提取信息，实际上首先就是检测所接收到的信号与送往携带信息的单元的信号相比，其时间差和频率差是多少。

为了更好地理解时间差和频率差怎样代表将获取的信息，接下来我们首先以合成孔径雷达为例作一解释。合成孔径雷达的发射波束，可以将一份电磁能量照射到需要探测的目标区域内。假定在这个区域内，仅仅只有一个点目标，我们能得到什么样的反射呢？图 4.7 给出了雷达与目标的相对关系示意图，我们把目标看成是固定的，雷达相对于它有一个固定的速度，这个速度与雷达和目标连线的夹角为 θ ，雷达到目标的距离为 R 。雷达探测的目的是获取目标位置的信息，也就是说，希望通过对回波信号的处理，尽量好地获得关于 R 和 θ 的信息。

大部分人都很熟悉雷达测距的原理，我们比较目标反射信号与雷达发射信号的时间差，记这个时间差为 δt ，它是信号往返于雷达

与目标之间的路程引起的，于是

$$\delta t = \frac{2R}{C} \Rightarrow R = \frac{\delta t \cdot C}{2} \quad (4.6)$$

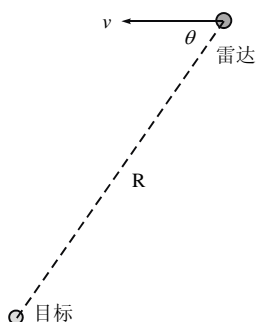


图 4.7 雷达与目标的相对关系

另一方面，我们知道，雷达与目标的径向速度为 $v \cos(\theta)$ ，于是，当信号频率为 f 时，所接收到的回波频率与发射的频率将出现一个频率差，其大小为

$$\delta f = f \cdot \frac{v \cos(\theta)}{C} \quad (4.7)$$

于是，可以推导出目标相对于某个指定方向 θ_0 的切向距离 D ：

$$\cos(\theta) = \frac{\delta f \cdot C}{f \cdot v} \Rightarrow D = R \cdot d\theta = \frac{d(\delta f) \cdot C \cdot R}{\sin(\theta_0) \cdot f \cdot v} \quad (4.8)$$

为了简化问题，在分析原理时，我们并不排斥 $\theta_0 = \pi/2$ ，于是

$$D = R \cdot d\theta = \frac{\delta f \cdot C \cdot R}{f \cdot v} \quad (4.9)$$

以上分析告诉我们，目标的位置信息可以由目标反射信号相对于发射信号的时间、频率变化来推算。前面几个公式中的字母 C 为

光速 ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$)。如果我们试图在两个方向分别获得对位置 10m 的分辨率, 那么我们对时间差的测量分辨率就应该是大约 66.7ns; 如果雷达运动的速度为 100m/s, 目标距离大约为 100km, 信号频率以 GHz 为单位, 而频率差以 Hz 为单位, 那么对频率差的分辨率就应该是大约 $f/30$ 。也就是说, 如果信号为 9GHz, 需要的对频率差的分辨率为 0.3Hz。分辨率提高 10 倍, 原则上仅仅需要将时间、频率差信息的测量分辨率同样地提高 10 倍。暂且先不讨论工程上如何获得这样好的测量分辨率, 这里的解释已经表明, 所提取的时间、频率两维的差信息, 几乎立即就可以转化为目标的径向、切向位置信息。因此我们可以说, 合成孔径雷达的成像, 就其中的一个局部而言, 就是用目标在时间差、频率差的空间的位置, 按照一定转换规律, 折算成物理空间的位置。而且当这个局部比较小的时候, 这个变换几乎就是线性的。

但是, 上述分析是针对独立、单个的反射单元而言的。如果我们存在多个反射单元, 它们的反射将被叠加在一起, 能够直接获取时间差、频率差信息的前提是, 在提取的过程中, 多个单元的反射彼此没有相互干扰。如果不同位置的反射造成时间差和频率差至少有一个不一样, 而这样的不一样又导致这些不同的反射信号彼此正交, 那它们自然就不会相互干扰。我们在上一章中力图寻求这样的信号形式, 实际上就是为了制造这样的条件。

实际上, 我们无法得到理想的样板信号, 满足在将它的时间位置和频率位置移动后, 所得到的信号彼此都是正交的。也就是说, 我们实际遇到的样板信号, 或多或少都有一个同样的特征: 不同的反射彼此会相互干扰。我们寻求一个比较好的信号形式, 不过是使这样的干扰小一点, 在一定限度内或许可以忽略而不予认真考虑。但是, 如果我们面对这样的特征, 从原理上讲, 能不能消除不同分量之间的相互干扰呢?

假设总共可能有 n 个不同的回波, 或者更一般地说, 基本信号

样板在携带了信息后有 n 个不同的信号波形，它们并不完全相互正交。如果接收到的信号是这样的 n 个信号的某一种叠加，把每一个信号看成总信号的一个分量，就是

$$S_r = \sum_{i=1}^n A_i S_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \quad (4.10)$$

分别用提取其中一个回波大小的办法处理信号，对于对应的那个分量，我们得到的是它的大小。同时，由于不同的分量不是彼此正交的，对其他分量，也得到一定大小的结果。也就是说，处理得到的是

$$D_j = \sum_{i=1}^n A_i \cdot G_{ij} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}_j \quad (4.11)$$

其中系数 G_{ij} 是不同分量相互处理所得到的结果。对所有的分量都这样做，就得到一个 n 维的矢量，用矩阵方式描述这个总的结果：

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \quad (4.12)$$

我们需要得到的是各分量的大小 \mathbf{A} 。如果所有的分量是正交的，就有：

$$\begin{cases} G_{ii} = 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ G_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.13)$$

也就是说， \mathbf{G} 是一个单位矩阵，我们得到的结果 \mathbf{D} 就是 \mathbf{A} 。而对于各分量不是完全正交的情况，上式不再成立。但是，如果 \mathbf{G} 是一个满秩的矩阵，我们仍然可以计算出：

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}^{-1} \quad (4.14)$$

如果用语言描述这里所讲的问题，那就是在只有一个信号分量

时,得到的结果表现为它在很多分量上的直接提取结果不为零,我们把这样的状态叫做扩散。而我们最终期待的结果,是正确的对各分量大小的估计结论,我们把从扩散的结果转变为正确的结果的过程叫做锐化。式(4.14)告诉我们,锐化是可以实现的。但是,不能忘记产生该公式的一个前提,是假定矩阵 \mathbf{G} 是满秩的。其实,仅仅是满秩还不够,因为如果这个矩阵接近于不是满秩,它的逆矩阵将表现为非常临界,使得矩阵乘法的运算不那么稳定,任何微小的实际误差都将使结果很不可信,工程效果与不满秩还是一样的。

下面以仅仅只有时间差的一个集合为例,来具体说明这个问题,并且假设信号是周期循环的。也就是说,我们所面临的所谓不同的信号分量,就是一个具体信号的不同的循环位移。这样构成的矩阵 \mathbf{G} 的每一行就是其他行的平移。把这个矩阵的所有行加起来,必然得到一个元素值恒定的结果,把这个数的大小记为 k_1 。将每一行的结果减去 k_1/n , 这个矩阵的秩是不变的。但是,现在所有行的总和将成为零,表明这个矩阵一定不是满秩的。这样,就在一定程度上证明了,如果我们面对这样的问题,用式(4.14)进行锐化实际上是不可能的。这与我们在其他场合下研究得到的结论是吻合的。

这样,我们需要一个虽然可能是近似的,但却有比较好的锐化效果的矩阵。对于上面所给出的时间维的集合的特例,由于问题的规律性,我们可以把矩阵 \mathbf{G} 的一行看成一个时间函数,寻求可以起锐化作用的矩阵等效于寻求一个函数,它与矩阵 \mathbf{G} 的一行做互相关,结果在某种意义上是一个宽度尽可能窄的冲击状函数。由于两个函数的互相关的傅里叶变换,是它们各自傅里叶变换后对其中一个取共扼后的乘积。如果已知函数的傅里叶变换具有已经被限制的带宽,在这个带宽之外,其分量为零,那么,无论如何也找不到另一个函数,有可能使它们的乘积不为零。这就是说,我们不可能拓宽合成的傅里叶变换的频谱宽度,使对应的函数成为一个时间冲

击。这就表明，我们找不到可以实现理想锐化的那个处理函数。实际上，不确定性原理已经表明，我们不可能产生一个信号，其等效的时间、带宽（用角频率来度量）乘积能够小于 $1/2$ 。所以，一旦函数的频谱宽度小于某个值，其时间宽度将必定大于某个对应的值，我们从理论上就不可能把它设为任意小。因此可以说，对某个具体的非冲击状的函数作锐化，其效果不在于这个函数看起来是什么样子的，而是它的频谱宽度。由于我们能够得到的所谓锐化后的效果的频谱不能被展宽，而一个频谱宽度比较小的信号在时间上的宽度必然比较大，所以锐化后的效果也就一定被限制了。

但如果把寻求的目标做一点修改，比如变成时间位移比较远的位置处相关的结果足够小，或者在离开一定的时间后相关的结果不大于某一个值，那么，这样的目标将是可能实现的。我们在第3章中已经给出了一些示例，说明当频谱分量的相位为零，幅度分量虽然是带限的，但是满足某种分布时，有可能使时间轴上远处的栅瓣非常小，或者当时间超过某个位置后，所有的栅瓣都不大于某个值。这样，我们就可以用这个状态为参考，根据已有函数的频谱，寻求需要的那个函数的频谱，然后反算出那个函数。

可以理解到，尽管在论述信息携带时我们讨论了采用频谱包络具有一定形状的信号，这样的信号在时间上可能有比较好分辨的效果。但是，如果不是这样，我们可以在提取信息时，用滤波的方式改变信号的频谱幅度包络，达到类似的效果。即使没有这样做，在已经得到了一些彼此不正交的中间结果后，也可以通过对中间结果的锐化处理，仍然达到类似的效果。归根结底，在时间上获取比较好的分辨率的条件是信号的频带宽度要足够宽。对称地，要想在频率上获取比较好的分辨率的条件是信号的时间跨度要足够大。

但是我们这样结论，并不意味着面对一个工程问题，不必要做任何努力去获取比较好的分辨率。因为理论上给出的极限是基于不确定性原理，而不确定性原理所要求的是信号的等效时间宽度和频

带宽度，如果信号的时间或频率描述是间断的，它的等效的宽度比工程理解的宽度可能有明显的差别。让我们用一个具体的例子来理解这个想法，力图实现一个比较宽的波形在工程意义上的锐化。设原函数为一个三角波，总跨度为 5 点，不妨记成 $1/3$ 、 $2/3$ 、 1 、 $2/3$ 、 $1/3$ 。我们用这样的办法来寻找锐化它的具体函数，将这个函数循环移动，构成一个维数为 21 的方阵，我们已经知道它是奇异的。对它作一个改变，将靠近外围的两个 3 行改成冲击，也就是说，只有值为 $3/3$ 的地方被保留，把 $1/3$ 、 $2/3$ 都强制修改为 0。结果，这个矩阵成为满秩的矩阵。对它可以求逆。然后，我们用这个逆矩阵中间的第 11 行的内容略作改动，用来作为对原函数锐化的函数。这个具体的函数为：

0、0.33、0、-1.5、3、-1.5、-3、6、-3、-4.5、9、-4.5、-3、6、-3、-1.5、3、-1.5、0、0.33、0

锐化前后的结果，如图 4.8 所示。需要注意的是，左、右两个图下面的尺度是不一样的，左图总共的范围只有 8 点，而右图却有 30 点。可以看到，我们显然已经达到了把宽度为 5 点的波形压窄为 1 点，但是所付出的代价，却是在远处（在本例中仅仅为了演示，距离不是很远），出现了一个不应该出现的小波形（为了演示，也不是很小）。而且从用以锐化的函数来看，还可以发现它的值比较大，呈振荡型，这是计算不很稳定的一个表现。因为面对噪声，这些大系数变换所带来的结果是，噪声不见得能够相互抵消，至少锐化前后信噪比很可能会向差的方向变化。

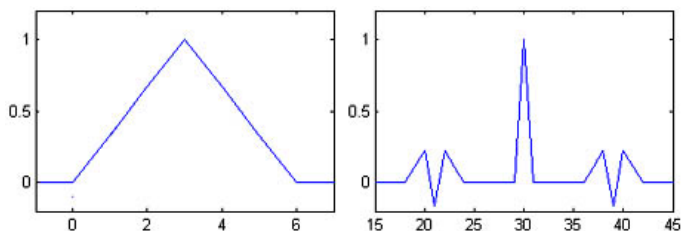


图 4.8 三角函数锐化前后的波形

说到底,对传输中携带信息的提取,首先是要提取所接收的信号与样板信号的时间差和频率差,或者考虑到信号可能是一个叠加后的产物,是要提取信号分量随时间差和频率差变化的幅度。这个幅度可以按模拟方式再转换成最终需要的信息,或者,这个幅度被量化后按其位置和幅度的大小就对应我们需要的信息,等等。于是我们再次看到,提取信息需要样板,不管这个样板本身是在接收中获取的,还是通过其他方式事先或事后获取的。下面,我们将展开论述怎样提取信号相对于样板的时间差和频率差信息。

大家知道,对于两段仅在有限区间内非零的相同信号,如果它们之间有一个时间差,计算这个时间差的有效方法是计算这两个信号的循环卷积。这个计算的结果将是一个时间函数,在计算卷积的信号时间长度大于非零信号的时间长度时,需要在没有信号的位置上补充零,结果,在两个信号的时间差位置上,而且只有在这个位置上,两个信号才是相同的,这个时候卷积的结果必定达到最大值。因此,卷积的最大值所处的时间位置也就指示了这两个信号的时间差。对于连续的信号,早就有人严格证明了这个结果,我们已经没有必要在这里重复。由于卷积是线性运算,当信号由很多个分量组成时,有可能同时发现有多个峰值,计算出所有的时间差,还包括这些分量的相对大小。但是,这样的计算在实际上是有问题的,主要原因是我们并不能保证卷积只出现一个峰,对某一个时间差所造成的非主峰与另一个时间差所造成的主峰是很难区分的。

另外,当采用离散的方式实施这样的计算时,即使我们采用了满足保留信号全部信息的足够高的采样频率,计算的结果也还会出现新的问题。问题就出在离散化的采样上,因为离散后的数据的计算结果必定还是离散的,我们无法保证对结果的采样正好能采到这个峰值。这样,首先是对时间差计算的精度将被采样间隔限制。而且,一旦峰值没有被直接采到,而在另外时间位置处较高的输出,原本不是最大值,就有可能成为最大值,给出时间差结果的错误判

断。在存在噪声的时候，这个现象可能会更加严重。我们不妨用一个非常简单的例子说明这一现象，设信号为一个正弦波的一个周期，采样周期是它的 $1/4$ 。对于样板信号，有一个采样点出现在相角为 45° 处，采样结果为 $0、1、1、-1、-1、0$ ，而对于待比较的信号，有一个采样点出现在相角为 5° 的地方，结果为 $0、0.087、0.996、-0.087、-0.996、0$ 。于是，这两个信号相关后的输出随着时间的变化，将是 $0、-0.996、-1.083、1.905、2.166、-0.822、-1.083、-0.087、0$ 。最大值 2.166 与次大值 1.905 的差距不大，很容易引起错误，而它们之间的时间差是一个采样周期。

解决这个问题的办法之一，是将离散的结果连续化，即把每一点的结果都看成为一个 sinc 函数，它的位置分别是顶点在离散点的位置处，然后全部叠加起来。这样做，在理论上应该没有问题，但是实际上的计算量将可能是非常巨大的。因此，需要将 sinc 函数做一分析。

因为

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \int \cos(\omega x) \cdot d\omega \quad (4.15)$$

将该函数所有的频率分量都移相 90° ，并在本书中称所得到的函数为 cosc 函数，可得到

$$\text{cosc}(x) = \int \sin(\omega x) \cdot d\omega = \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{2 \cdot x/2} = \text{sinc}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.16)$$

而另一方面

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{2 \cdot x/2} = \text{sinc}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.17)$$

我们发现这两个函数的关系为：

$$\frac{\text{cosc}(x)}{\text{sinc}(x)} = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \quad (4.18)$$

$$\sqrt{\text{sinc}^2(x) + \text{cosc}^2(x)} = \left| \text{sinc}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \quad (4.19)$$

也就是说，如果做两个相关，构成复数输出 $\text{sinc}(x) + j\text{cosc}(x)$ ，那么它的模的分辨率将降低一倍，而幅角将是 x 的线性函数。

有了这样的分析，就可以进行下面的探讨。对于计算以后的离散的相关结果，如果仅仅关注那些值比较大的点附近，不妨先近似认为整个输出就是一个 sinc 函数，而不是多个 sinc 函数叠加的总和。在这样的条件下，如果我们计算另一个辅助的相关，它是把样板信号的所有频率分量都作 90 度移相后当成又一个样板，这个相关结果的输出也就应该为一个简单的 cosc 函数。如果我们分别把这两个输出看成一个复数的实部和虚部，计算这个复输出的相角，那么，我们会发现，这个相角应该是上面所用符号中的 $x/2$ 。也就是说，所计算的相关结果的相角在原 sinc 函数的顶点处为零，相临采样点之间的差别为 $\pi/2$ （因为 sinc 函数的零点间隔为自变量范围为 π ），在这两个位置的中间，相角呈线性变化。在计算两个输出时，除了得到 sinc 函数的幅度外，还将得到一个相角。如果采样点位于峰值，输出的相角应该为零，如果采样点没有在峰值处，输出的相角应该不为零。根据这个相角的大小，可以推算这个峰值点应该偏离采样点多少。对于实际的相关输出，我们没有理由认为，整个输出仅仅只有一个 sinc 函数，因此，所计算的相角，应该是多个 sinc 函数混合后的结果。但是，我们可以近似地认为，对于幅度大的点，幅度小的点对它的影响不大，这样的相角，即使与峰值的位置不是严格的对应，至少也反映峰值的位置，或者说比仅仅只利用相关输出的幅度信息，提供了对相关峰值位置更多的信息。我们把这样两个相关合在一起，称为对信号的复相关。

让我们用两个非常简单的例子来说明复相关的概念。一个是频谱呈理想矩形的信号，它的自相关函数就是一个简单的 sinc 函数，在离散化后仅一点非零。另一个是正态分布的、带宽受限的噪声，

它的自相关有一个明显的主峰，但是并非仅有一点非零。它们的对比在一定程度上可以反映出上面给出的近似分析是否有效。图 4.9 给出的是这两个信号的复自相关结果。为了看清楚问题，我们把相关结果连续化，分别画出复相关的实部、虚部、模和相角。图 4.9 中，左上为实部，右上为虚部，左下为模，右下为相角，实线是理想频谱信号的结果，虚线为含噪声信号的结果，横坐标刻度为采样点，所有的幅度已经被归一化处理。

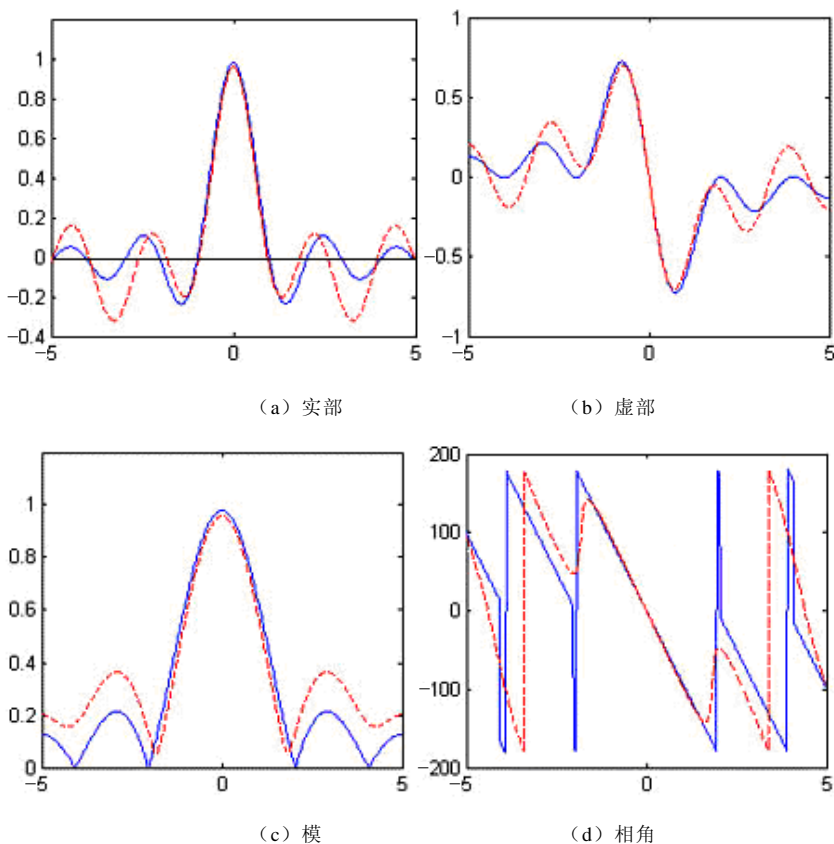


图 4.9 复相关的输出

可以看到, 在正、负一个采样点的范围内, 临近的相对比较小
的非零输出对中心点比较大的输出的影响不会很严重, 特别是相角
的变化, 基本上是 -90° 到 $+90^\circ$ 。同时, 模的变化在偏差为半个
采样点间隔时, 仅仅下降为约 0.89, 而不是原来实部下降的约 0.62。
那么, 当相关输出峰值位置不是正好在采样点位置时, 输出复相关
模的下降应该不大, 但是, 根据它的相角, 我们却可以近似地得到
相当好的相关峰的位置。如果没有引入复相关, 即使我们采用了幅
度的完全还原, 由于幅度在相关峰附近的变化趋于平坦, 在存在噪
声的条件下, 显然很难比较准确地确定相关峰的位置。

以上说明怎样获取时间差的具体思路, 不仅仅是为了提高获取
时间差的精度, 还因为想要提取频率差。分段地看信号, 当信号存
在频率移动时, 如果这份移动量不大, 在短时间内就注意不到信号
的频率差, 因此对于每一小段, 观察到的效果就是信号发生了时间
移动。但是, 对于由很多段组成的一个长时间范围, 由于信号的频
率不同, 其效果将是不同段的时间差在发生小的变动。当时间差变
化达到一个采样间隔时, 可以发现相关的峰值位置移动了一点。如
果这份变动没有跨越采样的时间间隔, 在没有精确获取时间差时,
我们将无法感知这样的小变化。但是, 如果引入了上面论述的复相
关, 就能够感知这一份微小的时间差别, 因为复相关输出的是一个
复数, 除了相关幅度在不同的位置具有不同的幅度表示了时间信息
以外, 复相关输出的相角大小也反映了时间差信息, 一个采样间隔
将被折合成 90° 相位差。于是, 近似地看, 我们发现复相关输出
的结果, 在同一点上含有频率差信息。如果对不同段的同一点所组
成的序列做傅里叶变换, 所获得的应该相当接近于我们期待的频率
差的分布, 如果这个变换的结果存在明显的峰值, 峰值在频率轴上
的位置应该就是信号某个分量的频率差信息。

非常明显, 这样的分析计算是近似的。但是, 如果所使用的信
号本来就是分段的, 比如是占空比为 1/100 的脉冲包络的信号, 上

面所提出的计算思路却至少是非常现实的。首先计算每一个脉冲的时间差信息，然后对于时间差在一个计算采样间隔内的一系列复结果做频率分析，得到频率差信息。

存在一部分应用，信号所携带的时间差和频率差的数量相当少，最简单的一个特例就是，所接收的信号只包含一个分量，它就是样板信号经过某一个特定的时移和频移。按照信号携带信息的观点，我们对这样一个信号分量的时间差和频率差的度量，精度应该比较高。这样一种原动的考虑，激励我们思索，是否存在特定的方法计算，不是泛泛地计算一长段信号的复相关，却可能获得相当高的测量精度。回顾相关的计算，一般利用的是卷积的一个数学特性，那就是卷积的傅里叶变换是两个信号各自傅里叶变换的乘积。也就是说，相关的傅里叶变换，其模是两个信号傅里叶变换模的乘积，而相角是两个信号傅里叶变换相角的差。我们把相角求差理解为根据不同的信号波形调整基点，找到差异所引入的真实相角。当只有一个信号分量时，这个真实的信号相角具有相当简单的规律，它应该是频率的线性函数，其变化的快慢就是时间差，具体地说，相角变化 360 度的频率范围的倒数就是时间差。另一方面，如果这个信号分量还有频率移动，那么在不同的时间位置计算这个真实相角，对于同一个频率，它也将随时间作线性变化，这个速率就是频率差，相角变化 360 所需要的时间的倒数为频率差。在存在噪声和量化等因素的影响时，计算得到的结果可能反映成这份真实相角并不是频率和时间的线性函数。但是，我们有理由认为，对于每一个小的时段，真实相角随频率呈线性关系，至少对于那些幅度分量比较大的点，我们可以用一条直线来拟合，它具有斜率和截距，对于很多个这样的小时段，斜率的平均值可以用来推算信号的时间差，而截距随时间变化也将可以用一条直线拟合，它的斜率将可以用来推算信号的频率差。简单地说，这一思路就是，使用所有频率分量的相位信息，在信号数量单一时，可能获得相当好的测量精度。

让我们用一个例子来说明前面的思路。设我们有一个样板信号，它的载频在变换到中频后为 10.5MHz ，脉冲调制，包络为对称的三角波，宽度为 $10\mu\text{s}$ ，重复间隔为 1ms ，总时间跨度为 100ms ，携带信息的信号是这个样本在时间上移动了 $2.35\mu\text{s}$ （我们去掉了实际上会出现的 $10\mu\text{s}$ 的所有整数倍，因为这是很容易做到的），频率上移动了 400Hz 。我们用 1MHz 的带宽接收信号，采样频率为 2MHz ，假设所接收的信号还带有比它的峰值功率小 20 分贝的噪声。图 4.10 的上图给出了这个信号的采样后的波形和检波后的波形（图中特意减少了脉冲之间的距离，以便给出三个脉冲），可以看到简单检波只能获得时间差，而且精度比较差。至于频率差信息，则由于检波而不复存在。对 100 个这样的信号脉冲进行复相关计算，使用的是脉冲样本所在位置 $50\mu\text{s}$ 的时间波形，得到的结果如图 4.10 的中图所示。为了明显看到性能的提高，我们给出了两个图，左图状态同上图，而右图把信噪比下降了 10 分贝。图中的坐标单位，时间向为 $0.5\mu\text{s}$ (2MHz 的倒数)，频率向为 10Hz (100ms 的倒数)。从这个图可以看到，我们所陈述的方法将给出一个时间、频率两维的结果，精度接近于一个量化单位，也就是大约 $0.5\mu\text{s}$ 和 10Hz 。如果使用信号频谱的相位量，图 4.10 的左下图给出了一个脉冲的频谱的幅度，比较大的为 20 到 32 点之间的所有点。因此，在它的右面，我们给出了在这个频率范围内的一个真实相角随频率变化的曲线，以及用直线拟合这个曲线后的截距随时间变化的曲线。根据真实相角的变化，应可以推算出仅用一个脉冲的时间差为 $2.354\mu\text{s}$ ，频率差为 400.098Hz 。很显然，它们达到了更高的分辨率和精度。

当信号携带了几个时间差和频率差时，上述方法可能被修改后推广，当然数量不能多。尽管我们举了脉冲条件下的一个例子，但是这里所给出的思路并没有限制信号必须是脉冲制的信号。

存在一部分应用，提取信号中信息的一个障碍，是有效信号中混叠了一份强度大很多的样板信号和其他一些与样板信号有关联、

却与需要的信息无关的强信号。这些强信号的存在，理论上对我们提取弱信号中所携带的信息并无关系，但是在工程实现时，它们的存在却无意中要求接收和处理信号的单元具有很大的动态范围。如果实际的设施所具有的动态范围不够大，有效信号中所携带的信息很可能由于这样的非线性而被抑制。于是，在真正的处理之前，只要有可能，就应该最大限度地对消所有不需要的信号，特别包括强度可能最大的样板信号本身。

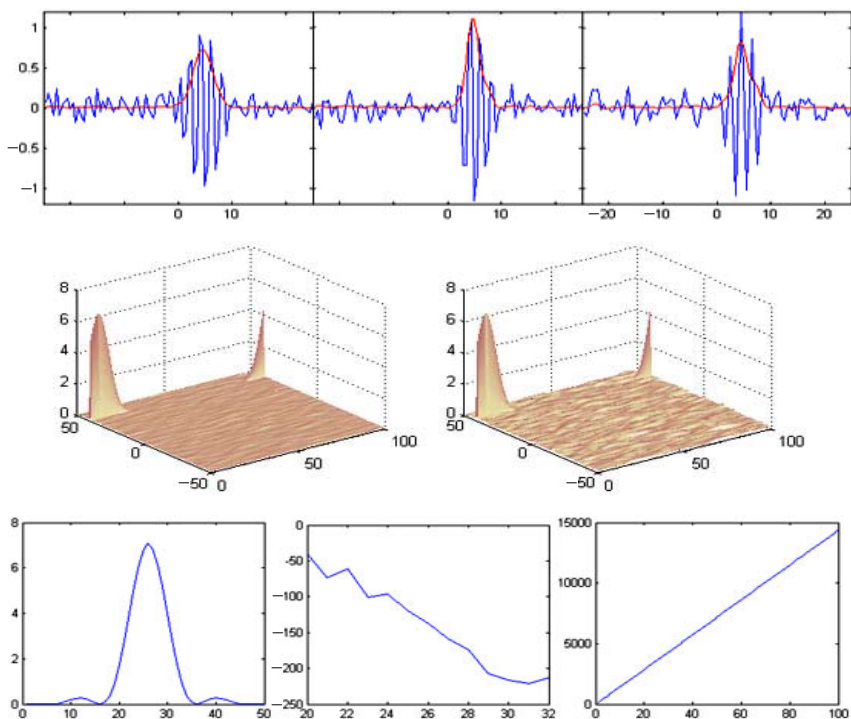


图 4.10 计算信号时间差和频率差的例子

如果我们只有一个通道，手头又没有样板信号，应该说，我们将缺乏对消样板的原则途径。但是，一旦手头有准确的样板信号，我们就可以做一个假设，认为在对消了样板后，总的信号强度有明

显的减少。于是，一种可能的准则就是试图使对消后的总信号的强度变得尽可能地小。由于完全没有误差的样板信号可能并不容易得到，混杂在被接收信号中的样板也可能与我们掌握的样板具有微小的时间差和频率差，这样的对消或抑制很可能损伤需要保留的有效信号。一种折中的考虑是，对消不追求达到使剩余信号的强度变得最小的结果，而是稍微少对消一点，使结果仅仅接近剩余信号的强度最小。

如果有几个具有独立接收天线的通道，而我们又知道最强的样板信号进入的方位，或者其他几个强信号进入的方位，那么，就可以采用空间波束赋型的办法，通过模拟或/和数字的办法，先制造合成波束的一个到几个零点，将这些强信号在空间上予以滤波，扣除它们进入合成的接收通道。

4.3 非配合信号样板的提取

为了提取信号所携带的信息，信号的原始样板是非常重要的。对于配合的应用，样板在一定意义上是已知的，人们不认为这是一个问题，更感觉不到这里有什么困难。传统的很多应用，包括实际上数量最大的通信和雷达类的应用，都属于那种样板是已知的配合应用。但是，对于非配合的信号，样板是未知的，提取样板原则上是一件非常困难的事。

首先，让我们估计一下，样板需要精确到什么程度。如果分析的结论是，有任何一点的差异都可能导致使用时效果的急剧下降，那我们在提取样板时将具有非常苛刻的要求。而如果我们的结论是，样板具有不严重的失真时，使用效果并没有大的下降，那么我们就可能用各种办法提取样板。工程上当然很希望对样板的要求不一定要非常精确。下面就这个问题先做一点分析。

第一类状态，假设信号处理过程为一个线性过程，结果表现为信号和噪声的相对增益不同，从而引起信噪比的提升，达到便于提取信号所携带的信息的目的。我们不妨用符号 \otimes 表示这样的处理，

把信号简单地分成两部分，一部分是我们关注的信号，它与样板密切相关，并假设在处理过程中具有相对的增益 G ，而所有其他的信号为不感兴趣的噪声，与样板相对独立，并假设处理过程中没有增益。这样的假定有一定的绝对化，但是，如果从统计的意义看噪声，并且强制地把这种与样板完全无关的噪声在处理过程中的增益作为参考，至少这样的假设具有帮助我们理解问题的意义。假设待处理的信号为 S_1+N_1 ，所使用的样板包含失真和噪声，被模型为 $Y+N_2$ ，其中 Y 就是理想化的样板。如果我们直接用两个符号的乘表示处理后的结果，那么，只有在用样板处理信号时，相对地说，我们有一个处理增益。于是，根据上述假定，可以表示用具有噪声和失真的样板处理含有噪声的信号这样一个过程为：

$$(Y + N_2) \otimes (S_1 + N_1) = G \cdot YS_1 + YN_1 + S_1N_2 + N_1N_2 \quad (4.20)$$

如果把处理前后信噪比的提高称为实际能够得到的处理增益，那么，这样的处理增益为

$$G_1 = \frac{G \cdot YS_1}{YN_1 + S_1N_2 + N_1N_2} \cdot \frac{N_1}{S_1} = \frac{G}{1 + \frac{1 + S_1/N_1}{Y/N_2}} \quad (4.21)$$

可以看到，当样板不含噪声时，实际可得到的处理增益就是我们假设的那个处理增益。但是当样板含有噪声时，处理增益将除以一个大于 1 的数，也就是说，可得到的增益将有所减少。将式 (4.21) 的分母表示为这个样板信噪比的函数，并用待处理信号的信噪比为参数，可以得到如图 4.11 的曲线。它的横坐标为样板的信噪比，参数为待处理信号的信噪比，而纵坐标为处理增益损失的分贝数。因为分母越大表示对处理增益的损失也越大，所以这些曲线的纵坐标越高，表示损失越大。

观察图 4.11 的曲线，可以看到，处理增益的损失是样板信噪比的单调函数，信噪比越高损失越小；同时，处理增益也与待处理信

号的信噪比有关，信噪比越低损失越小。但是，对于特别需要处理增益的场合，也就是处理前的信噪比相当低的情况，比如当这个信噪比小于-5 分贝时，它的效应基本可以忽略，因为从-5 分贝往下，所有的曲线基本上已经挤在一起了。这时，样板信噪比的效果可以被分成两段，0 到 5 分贝信噪比可以被看成一个分界。当这个信噪比为 0 到 5 分贝时，处理增益的损失为 3 到 1.3 分贝，如果这个信噪比明显低于 0 分贝，处理增益的损失接近于样板的信噪比的相反数，而如果这个信噪比明显高于 5 分贝，处理增益的损失一般就小于 1 分贝，可以被认为没有什么损失。

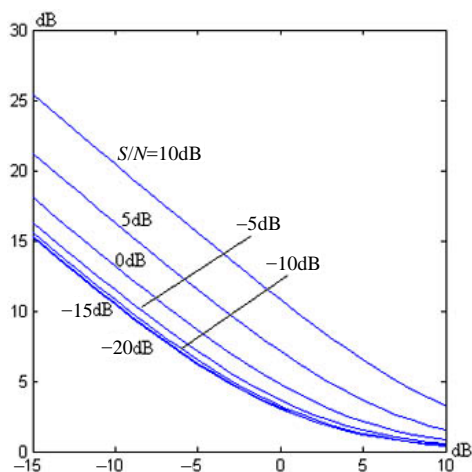


图 4.11 处理增益的损失

第二类状态，信号处理为非线性处理，一般说来，我们无法准确估计可能获得的效果。但是，如果假设这样的非线性处理可以沿用前面给出的公式，不过在输出中增加交调项，并认为它与正常的处理项具有一样的大小，虽然这样的假定不能被认为是一个一般关系，但是它具有一定的代表性，可以给我们一点处理所产生的效果的概念。在这样的假设下，式（4.20）可以被写成

$$(Y + N_2) \otimes (S_1 + N_1) = G \cdot YS_1 + YN_1 + S_1N_1 + S_1N_2 + N_1N_2 + YN_2 \quad (4.22)$$

处理增益的损失为：

$$G_0 = \frac{YN_1 + S_1N_1 + S_1N_2 + N_1N_2 + YN_2}{YN_1 + S_1N_1} = 1 + \frac{N_2}{N_1} + \frac{N_2}{Y + S_1} \quad (4.23)$$

如果我们认为，能够发生这样的关系的基本条件是，样板强度远大于信号强度，而伴随样板的噪声却远小于伴随信号的噪声，于是，这个式子的近似结果与式（4.21）相同，处理增益损失的因子大约为 $1 + N_2/Y$ 。

这个分析告诉我们，对于非配合的信号，我们会非常在乎怎样去获取它的样板，因为即使所获得的样板可能会伴随与它同样大的非样板的噪声（信噪比只有 0 分贝），它对于提取信号所携带的信息而言，不过就是 3 分贝的损失，却把非配合问题转化为配合问题。

对于观察信号的某一种描述方式，也就是把信号分解成一系列的分量时，如果信号具有这样一种特点，就是在这样的一系列的分量中，其能量集中在数量很少的部分分量中，我们就可以剔除所有低分量的部分，用少数分量合成这个信号，把所获得的信号当成样板。

比如，信号在时间上重复，但是在比重复周期长得多的时间跨度上，强度发生比较大的变化。于是，我们总可以采集强度比较大的信号的一段，首先发现信号的周期，然后按周期折叠，把若干段信号叠加起来，把这个叠加的结果当成样板。比如说，信号具有严格的周期，当我们对信号做自相关时，如果周期数足够多，就可以发现这个周期，然后将信号按周期折叠、叠加，提高一个周期的信噪比，把叠加的结果当成信号样板。如果我们用一个阵列天线接收信号，知道不同通道中的信号所相差的时间量，将所有被接收的信号移动一个叠加后为固定值的时间，使所有的信号严格在时间上位置一致，然后把这样移过时间的信号叠加起来，这同样可以提高信

噪比, 允许我们把叠加的结果当成信号样板。这样所做的处理, 实际上都是在时域上构造一定意义的周期, 发现信号的这个周期, 它表示信号能量集中在这个周期倒数的频率附近, 所谓叠加实际上就是仅仅取用这一小段频域内的信号。

也可以直接对信号做频谱分析, 如果发现它在频域内有明显的峰值范围, 截取这个范围内的内容, 而把这个范围之外的部分全设置成零, 也可以提高信噪比而获得信号的样板。实际上, 如果考虑对信号做自相关, 就是将其频谱平方, 使频谱大的地方贡献更大, 归根结底就是取频域上的大能量分量。同样地, 如果信号是脉冲制的, 为了获得样板, 我们首先会取时域上的大能量部分, 而把没有脉冲的时间段全部设置为零, 这显然会提高样板的信噪比。

对于某些特定的信号, 可能存在某些特殊的分解、描述信号的方式, 只要在那样的描述域内, 信号的能量明显集中, 我们自然也就找到了从信号中剔除大部分噪声的方法, 或者说找到了获取样板的方法。问题也可能正好反过来, 对于某些应用, 可能存在某些特殊的分解、描述信号的方式, 在对应的描述域内, 特定的背景噪声具有能量集中的特色, 于是, 我们可能除去这些部分分量, 使背景噪声得到明显的削弱, 从而获得信号样板。

其基本思想是相同的: 切除某些分量, 相当于首先把这部分范围内的信号切除, 引入了一个与之相反的噪声, 但是, 如果被切除的噪声大于被引入的噪声, 我们得到的效果是信噪比的提高。

所有这样的提取信号样板的过程, 可以被模型化为如图 4.12 所示的过程。这个过程能够被正确进行的前提, 可以说是我们已经在其中完成了一个判断, 那就是信号是存在的。因此, 提取信号样板的过程几乎就是检测信号存在的过程。我们能够检测信号, 一定是因为在某一个环节、在某种限定下、在某部分信号分量上, 我们所能发觉的信号比背景噪声强。这份强弱的对比, 一般说来都会明显地超过 0 分贝。因此, 我们又可以说, 能够被检测的信号, 在原则

上都可以生成样板，将非配合问题转换成接近于是配合的。

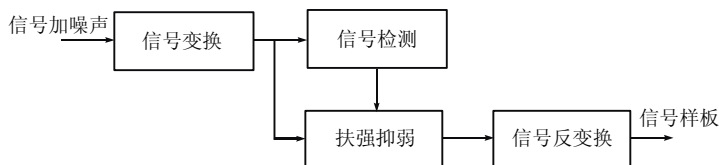


图 4.12 非配合信号样板的提取

让我们用一个例子来进一步说明这里所给出的思路。假设信号为一个频率捷变的脉冲信号，频率变化范围为 200MHz ，脉冲宽度为 $5\mu\text{s}$ ，我们的目标是比较多个通道中这样的信号的时间差。但是，即使最强的一个通道，我们必须采用 200MHz 的带宽，假设在这样的带宽内，所能够给出的最好信噪比为 -5 分贝。如果我们能够提取信号样板，就可以积累比如几百个脉冲而获得相当好的时间差信息。根据已知的先验信息，我们可以采用 200MHz 的接收机，对所接收到的信号采用 $8\mu\text{s}$ 一段， $3\mu\text{s}$ 滑动的方式，做傅里叶变换。这样处理，任何一个脉冲，至少会全部落入在某一个时间段中，在频域上看，信号将呈现相对大很多的信噪比，保证我们可以检测信号。然后，我们就可以滤除那个脉冲对应的带外噪声，通过反傅里叶变换返回时间域，在那里也获得一个比较高的信噪比，基本合理地检测出信号的时间段。这样，我们又可以滤除绝大多数没有信号的时间段，获得完整的、时间跨度非常大的一段样板。

图 4.13 给出了这个过程中若干重要的波形，其中的左图为原始时间波形的一段，我们无法看到信号，也不能用这样的波形做样板，中间为某一段信号的频谱，可以清楚地看到在频率域上有信号，右图为滤除带外噪声后的信号时间波形的一段，这里我们可以设置一个合适的门限，获得一段信号，并把它用做样板的一部分。可以发现，这样获得的样板依然带有噪声，表现为信号频率可能有细微的偏差，脉冲宽度一般说来是被缩小了一点点的，脉冲顶部出现调幅

(信号原是从 0 到 2000 的一个矩形包络的单频信号)。但是, 由这样的一串脉冲所构造的信号样板, 与原来真实的、无噪的信号是没有很大差距的。当我们使用这样的样板时, 它的信噪比显然早就不是例子中最初给出的-5 分贝, 可能上升到某个比较大的正的分贝值。

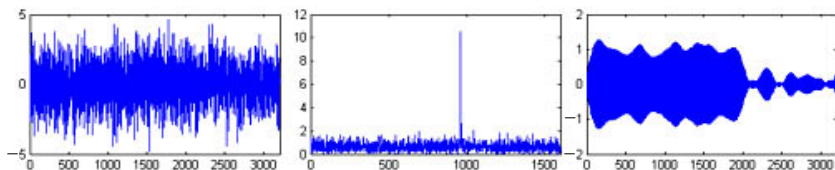


图 4.13 提取信号样本过程中的若干波形

还有一部分应用, 虽然被用来提取有用信息的信号是微弱的, 但是我们可以通过某个接收机, 获取相对强度和信噪比都比较高的样板信息。这样的信号来源于某一个具体的方位, 因此, 提高样板信噪比的基本方法就是首先测定样本信号来源的方位, 用方位角的选择性最大限度地抑制来自不需要方位的噪声。

第5章 若干应用问题讨论

在本书的前面部分，我们已经提出了一个明确的思想：信号是被用来携带信息的，为了携带一定量的信息，我们要求信号具有一定的能量；携带信息的方式基本上有两种，对应地，提取信息的方式也有两种。不论采用什么方式，对信号在某个描述域内的极性和幅度的测量、对一段信号的时间移动和频率移动的测量都将是最基本的。本章将根据这样的基本原理，进一步思考具体应用方面的问题。首先，我们想问，对于携带信息这样一个目标，信号形式有没有优、劣之分，如果有，我们能不能给出比较好的信号。当然我们还想与习惯的各种使用进行对比，试图从一个新的角度理解那些应用，并且思考传统的方式是否合理。最后，还想根据本书所提出的观点，给出一些应用的设想。

5.1 最佳信号波形问题

作者在本书前面多处提到过最佳信号波形问题，并且认为，对于信号的一般用途和特殊用途，应该会有比较好的波形和比较不好的波形之分。

在具体探索最佳信号波形之前，先提出一个基本的观点。假设有两种可以描述任何信号的表示方法，如果描述的各维都是正交的，由于它们可以描述任何信号，因此，它们的维数必然为无穷。如果对于其中的一种方式，它的任何一维用另一种方式描述时，必须使用无穷多的维数才能准确实现，那么，我们可以说，在其中一种描述方式内维数被限定在有限数之内的一个具体的信号，用另外一种方式描述，其维数就不可能是有限的。这很容易用反证法证明，

但是它的一个特例就非常有意思了，那就是任何一个时限的信号，其频谱一定不是带限的，而任何一个带限的信号，其时间长度一定不是有限的。不过，如果我们寻求的是一种近似，那么，我们还可以说，一个信号的绝大部分能量是可以集中在有限的时间范围和有限的频带宽度之内的。

首先，大家知道，在工程应用中，人们习惯用时域的观点来观察信号，从而把信号用时域上的方波来理解。但是，我们都知道，一个理想的方波，虽然看起来很简单，但是它的频谱却具有无限的带宽。也就是说，在一个描述方式上看，似乎是很简单的信号，如果换一个方式看，可能很复杂。至少对于理想的方波，由于任何一个接收机实际上不可能具有无穷的带宽，在使用中已经不可能是一个理想的方波。假设我们用有限的带宽来制约方波，同时又使波形比较接近方波，这样的波形会是什么样的呢？

图 5.1 给出了一个方波信号和它的频谱，其中左图为信号的时间波形，而右图为信号的频谱包络。很显然，信号频谱的包络为一个 sinc 函数，如果我们切除信号的高频分量，仅仅保留 sinc 函数中两个零点中间的部分，信号的带宽被限定了，但时间长度却变得无穷大了。如果我们在时域内切除偏离中心后越过零点的部分，信号的频带又将被扩展到无穷大。如果我们来回反复多次，状态将基本收敛，使我们获得的频谱宽度可以被认为是有限的、时间跨度也可以被认为是有限的信号。这个信号的波形和频谱如图 5.2 所示，可以计算出，这个时候在我们考虑的范围外的信号的能量将小于信号总能量的 0.05%。同时我们还可以发现，这时的信号波形为一钟形信号，其时间宽度增加了大约 85%，频带宽度增加了大约 23%。如果把这两部分结合起来，它们的时间、带宽乘积将不是 1，而是大约 2.2。当然，如果近似得再大一点，允许忽略 1% 左右的能量，那么，这个乘积数将很快减少到 1.9 左右。作为估计，我们在工程设计时可以把这个系数当成 2。

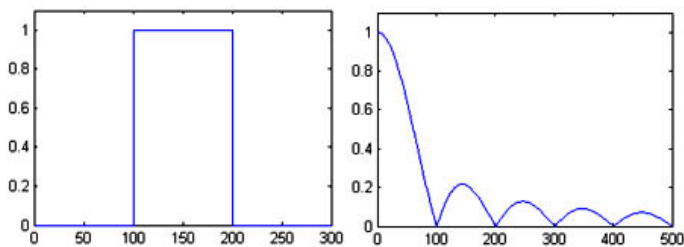


图 5.1 方波信号的波形和频谱

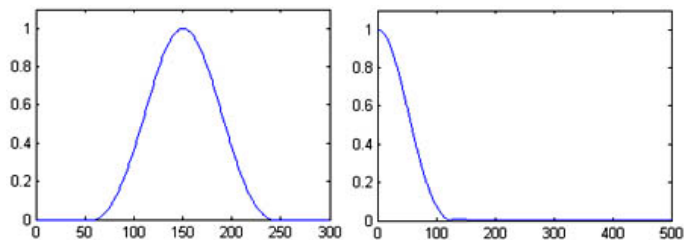


图 5.2 导出的时限、频限信号的波形和频谱

这时的信号波形，在很大程度上可以用一个简单的函数来近似，那就是余弦的平方。这样的信号波形和对应的频谱如图 5.3 所示。可以看到，这个信号的频谱主峰外的谱密度有一个略大一点的小包。但是，这个信号的带外能量仅比 0.05% 大一点点，而时间带宽乘积基本就是 2。

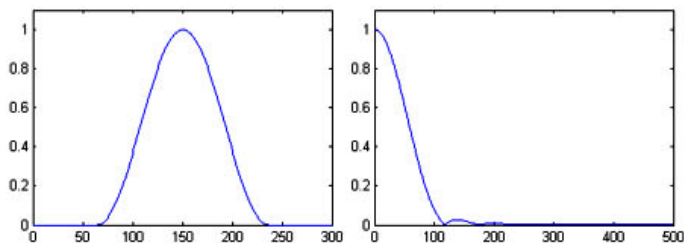


图 5.3 余弦平方脉冲信号的波形和频谱

对于一个高频信号，如果它的包络是某一个时间波形，那么它

的频谱将是连续的高频信号（包络从负无穷到正无穷为一恒定值）的频谱与包络频谱的卷积。因此，如果一个单频信号的幅度被调制，那么它的频谱也就是被平移，包络与频谱之间的上述关系将仍然成立。如果高频信号不再为单频信号，包络与频谱的上述关系将不再成立。另一方面，如果把上述信号频谱平移到某一个高频位置，那么它所对应的时域波形，将相当于一个高频信号，其频率等于这份频谱的移动量，其包络就是上面给出的信号。如果两个这样的高频信号的各分量的相位差是 90° ，那么这两个信号的平方和的平方根，将表现为它的包络。

一个时间函数信号的自相关结果，在时间差为零时达到最大值；而如果这个信号是一个频谱平坦的有限带宽的信号，它的自相关函数表现为 sinc 函数。如果这样的信号的各频谱分量的相位在所有可能的范围内均匀分布，我们已经定义过这样的信号为 H 信号。 sinc 函数除了中央部分以外，周期地越过零点，所以，如果我们在整点处观察这个信号，表现为这样的自相关函数只有中央一点非零，其余位置处处为零。不过，如果我们分析所有的时间点，这样的自相关结果，除了时间差为零处出现一个主峰外，仍然具有很多栅瓣，而且栅瓣的大小与时间差的绝对值成反比，最大的栅瓣幅度相对于时间差为零的主峰大约为 0.212，或 -13.5 分贝。这里，我们遇到的是频谱为矩形的信号的时间波形的问题，因为一个信号自相关函数的频谱是其频谱幅度的平方。本书前面曾经给出过一些简单尝试的结果，图 5.4 则给出了在时间域内栅瓣比较小的实对称频谱及对应的时间函数的波形。其中左图为时间函数，也就是我们面临的自相关函数，给出的仅仅是对称图形中的一半，其中具有明显栅瓣的是用作对比的矩形频谱的时间波形，而虚线（从横坐标 100 处才从图形外部进入）是小栅瓣曲线放大 50 倍后的结果。可以看到，对应的主瓣宽度基本加倍，而栅瓣幅度的最大值还不到 0.003（或者说在改变了频谱包络后，与矩形包络相比，栅瓣被压低了至少 50

倍以上)。图 5.4 中的右图为频谱，同样只画出了对称图形的一半。其中的实线（下面的曲线）为与时间波形对应的频谱，并且是严格限定了宽度的，而虚线（上面的曲线）则是它的平方根，也就是说它是自相关函数为左图的信号的频谱幅度特性。

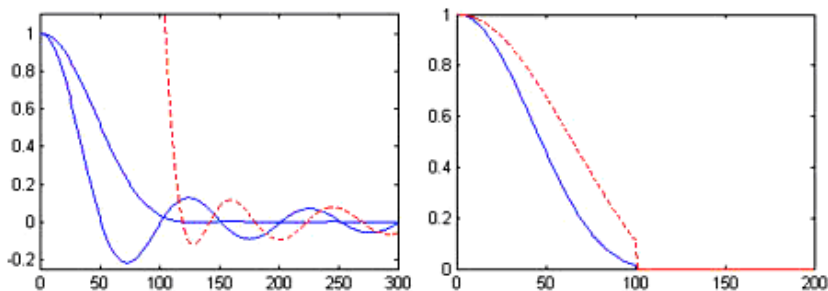


图 5.4 实对称频谱及其对应的时间函数一例

图 5.4 的右图中的虚线可以有一个相当好的近似，其表达式为

$$A(f) = 0.48 + 0.52 \cdot \cos\left(\frac{f}{0.69B} \cdot \pi\right) \quad |f| \leq \frac{B}{2} \quad (5.1)$$

可以发现，从构造信号的角度看，时间上呈矩形的信号占据的频谱太宽，余弦平方形式的脉冲比矩形的好。从自相关给出尽可能小的栅瓣的观点看，矩形频谱的信号不如用式 (5.1) 表示的带限频谱信号好。工程上可以做到的比较好的相关栅瓣的水平，应该是大约 0.003，或者约 -50dB。这个量值，与我们在本书前面通过例子给出的没有什么明显差别，不过在那里，对于工程应用，只给出了一个保守的估计，说实际可用的是 -40dB。

既然有些信号波形不是最好，我们就必然有改造信号的意愿。一般的情况，我们可以在接收信号以后，在处理信号时，采取加窗的办法改造信号。但我们想质疑：为什么不在使用信号时，在发射以前，就采用加窗的办法改造信号？

很多人已经研究了矩形信号变换后的栅瓣问题，而且结论是很清楚的。在数学上，我们可以找到栅瓣很小的窗函数，但是，为此必须付出相应的一些代价。图 5.5 给出了不同的窗函数所对应的傅里叶变换的幅度，可以清楚地看到，如果仅仅就压低变换后的栅瓣而言，我们甚至可能获得优于 100 分贝的效果。但是，无论采用什么窗口，所付出的代价就是主瓣宽度的增加。而且，从图 5.5 可以明显地看到，栅瓣抑制越大，主瓣的展宽也越大。

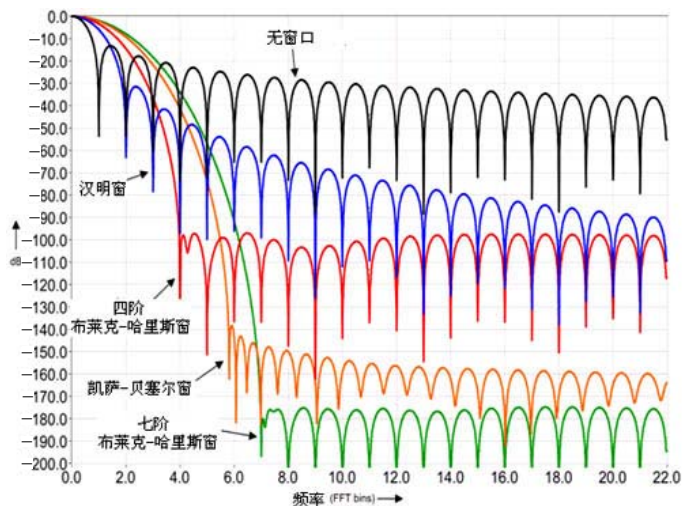


图 5.5 窗函数的效应

如果没有噪声，频域上的加窗仅仅是计算过程中的一份对不同频率信号的不同加权，在什么时候加权应该没有差别。如果有噪声，并且把判定问题好坏的准则定为处理后的功率信噪比的高低，那么，在什么时候加权就应该有差别了。假设在频率范围 B 内，频谱密度用功率表示（注意，式 (5.1) 中的为电压），信号的频谱密度为 $s(f)$ ，噪声的频谱密度为 $n(f)$ ，加权函数为 $g(f)$ ，它们都是正函数，记加权前后信噪比的变化为 K ，那么

$$K = \frac{\int_B s(f)g(f) \cdot df}{\int_B n(f)g(f) \cdot df} \cdot \frac{\int_B n(f) \cdot df}{\int_B s(f) \cdot df} \quad (5.2)$$

我们的目标是使 K 尽可能地大。引入

$$S(f) = s(f)g(f) \quad (5.3)$$

就可以把式 (5.2) 改写为

$$\frac{1}{K} = \frac{\int_B n(f)g(f) \cdot df \cdot \int_B S(f) / g(f) \cdot df}{\int_B n(f) \cdot df \cdot \int_B S(f) \cdot df} \quad (5.4)$$

根据这个式子的对称性，可以证明在被积分函数也表现为具有对称性时，具有最小值，条件为

$$g(f) \propto \sqrt{\frac{S(f)}{n(f)}} \quad \text{或} \quad g(f) \propto \frac{s(f)}{n(f)} \quad (5.5)$$

如果再假设加窗前噪声的谱密度是均匀的，那么，式 (5.3) 和式 (5.5) 将成为

$$g(f) \propto s(f) \propto \sqrt{S(f)} \quad (5.6)$$

也就是说，为了使功率信噪比达到最大，加窗前的信号频谱应该与频谱窗的形状一样，正比于我们想要使用的信号频谱的平方根。

如果我们希望信号的频谱电压为图 5.4 右图中的虚线（上面的曲线）所示，那么其功率必定为图中实线（下面的曲线）。而根据上面的分析，如果噪声谱是均匀的，我们发射的信号的频谱功率和接收时所加的窗的形状应该是它的平方根，也就是虚线（上面的曲线）。如果用电压表示，应该是对应的平方根，这被画在图 5.6 中，

其中的实线（下面的曲线）就是图 5.4 中的虚线（上面的曲线），而这里的虚线（上面的曲线）又是它的平方根。

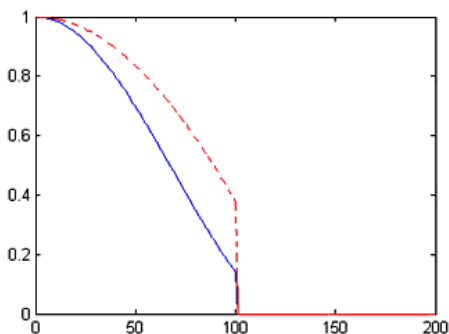


图 5.6 应该使用的信号谱密度函数和加权窗函数

这条虚线有一个比较接近、也比较容易实现的近似，为

$$A(f) = 1 - 0.635 \left(\frac{f}{0.5B} \right)^2 \quad |f| \leq \frac{B}{2} \quad (5.7)$$

在工程使用中构造这样的所谓最佳，到底能得到多好的效果，需要有一个认识。让我们用一个典型的例子来说明这个问题。假设我们需要的信号谱密度函数在带宽内为一线性函数，即 $S(f)=f$ 。对于频谱均匀分布的噪声背景，可以计算采用频谱均匀的信号和采用上述最佳频谱分布的信号时两个不同的 K 值，同时对比这样的 K 值的差别。不难计算得到，这个比值为 $9/8$ ，或者说，差距仅仅为 0.5 分贝。这也许可以解释，为什么在现有很多应用中，人们没有考虑采用这里所提出的最佳信号波形所对应的频谱。

5.2 通信信号波形分析

人们早就熟悉各种通信信号，就数字通信而言，核心问题之一就是构造合适的信号波形，分别传送信息 0 和 1 。在本节中，我们

将仅仅根据本书所提出的想法构造和提出适合用于在发射时就携带信息的信号波形。

假定用二进制的方式携带信息，也就是说，信号无非是表示 0 或 1。再假定信号可能有各种描述，但是我们在接收时仅仅通过相关接收取出预知的那一份分量的信号的大小，有这样的分量表示 1，没有这样的分量表示 0。那么，实际上就是用一个样板信号对接收的信号做卷积相关，获取一份输出，根据这样的输出，再判断它所携带的是 1 还是 0。很显然，我们用什么也不发送代表 0，发送样板信号代表 1。我们分析在发送 1 时的状态，比较合理的假定是，相关输出表现为一个时间函数，在信号时间与样板时间重合时，一定会达到一个最大，而在时间经过发送信息的单元长度后，输出应该为 0，以免影响我们对其他时刻到底发送了什么信息的判定。为了避免精确的时间对位，在时间差为 0 和单元时间长度附近，我们并不希望相关输出的变化非常激烈。为此，我们很容易构想，如果发送信息的单元时间长度为 T ，所选取的信号的自相关输出应该具有余弦平方形式的一个宽度为 $2T$ 的脉冲波形，也就是 5.1 中图 5.3 左图那样的波形。于是可以推断，这个信号的频谱的幅度平方，应该具有图 5.3 右图那样的形状。经过计算，我们应该可以得到这个信号的时间波形。

上述分析所给出的结果是，我们需要构造的仅仅是信号频谱的幅度，而不是它的波形。确定信号的频谱幅度后，信号的波形，包括它的时间长度，仍然可能有很多不同的选择。即使把信号先假定为无振荡的脉冲状信号，它可能是所有可能中时间长度最小的，但我们也会发现，这个信号的时间波形的宽度没有被限定在时间 T 之内，它的频谱宽度也没有被限定在 $2/T$ 之内。也就是说，这样导出的信号波形需要做一点变形优化。

我们把这样的波形结果叫做钟形脉冲，它在时间为 $-T_1/2$ 到 $T_1/2$ 之间非零，可以用下列公式近似：

$$s(t) = \begin{cases} 1 - (2t/T_1)^{1.5} & 0 \leq t \leq T_1/2 \\ s(-t) & t < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

它的波形如图 5.7 (a) 所示, 其自相关函数如图 5.7 (b) 中的稍靠下方的曲线, 而另一条稍靠上的曲线为用作比较参考的余弦平方脉冲, 它们基本没有什么差别。图 5.7 (c) 则是这个信号的频谱。在这些图中, 信号时间波形的横坐标单位为 T , 而信号频谱的横坐标单位为 $1/T$ 。可以看到, 当信号时间跨度大约为 $T_1=1.2T$ 时, 它的自相关结果相当接近于宽度为 $2T$ 的余弦平方脉冲, 而信号的频谱基本上被限定在 $2/T$ 之内。因此我们可以认为, 这里所定义的钟形脉冲是一个用来在发射时携带信息的比较好的信号样板之一。

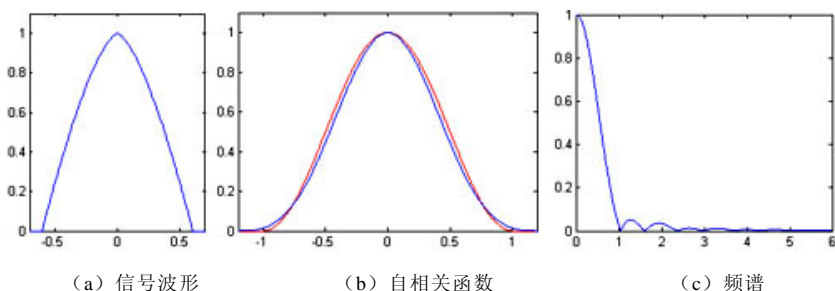


图 5.7 钟形脉冲的波形、自相关结果和频谱

如果我们给予信号一定的载频, 也就是说, 将信号的频谱移到某个高频处, 所使用的信号将是被函数 $s(t)$ 调制的一个高频信号。根据前面已经陈述过的理由, 如果我们在做相关处理时, 分别使用被同样调制的两个相位差为 90° 的信号为样板, 再求这两个处理结果的平方和的平方根, 所得到的相关结果应该仍然是一个余弦脉冲。因此, 我们可以得出这样的结论, 用数字方式携带信息, 所使用的信号基本带宽是信息码速的大约两倍。实际上, 根据上面的陈述, 这里所指的基本带宽, 应该就是一定意义上的最小 (但绝不是极限, 因为我们也没有证明这就是极限) 带宽。在原理和实现上,

原则上并不存在采用更大带宽的制约。

我们关注的是自相关以后的结果，但是，在限定这个结果的条件下，我们限定的是信号频谱的幅度的平方，或者信号频谱的幅度。图 5.7 (a) 的信号波形，仅仅是图 5.7 (c) 的信号频谱在所有谱分量的相位全是零条件下的一个特殊结果。如果信号的频谱相位不是全零，我们没有任何理由认为，一个单元信号的时间跨度会表现为仅仅只有 $1.2T$ 。从这个意义讲，一个单元信号的时间长度和它的波形形状并没有受到我们所陈述的理由的任何约束。实际信号一个单元所占的时间长度可能大于传输信息所需要的单元时间长度，这可能导致下列两种情况中的一种：要么让每一个信号单元顺序连接，信息传输的速率将被信号的单元长度限制，而不是被信息的单元时间长度限制；要么还是在每一个信息单元时间长度内传输一个信息，不同单元的信号将发生重叠。但是，信息传送速率的高低，所设计的信号在发射时重叠与否，都不会改变问题的实质。

如果我们使用两个载频，互补地用于信息 0 和 1，那么，无论如何，我们将使用两倍的带宽和两倍的能量或平均功率。但是，我们将得到两个相反的相关输出，它们在合成时电压加倍，就输出所反映的功率而言，则将是四倍。也就是说，使用两个载频，我们所可能得到的效率并没有发生变化。所不同的是，如果我们使用了两个载频，而且信号没有发生重叠，信号的峰值功率将不随我们具体地在传送 0 还是 1 而发生变化，信号的功率将是比较平稳的。

非常有意思的是，在推导信号的论述过程中并没有使用移频键控这样的思路。因此，我们得出的第一个论断是，信号波形的包络并没有必要一定是矩形的。我们甚至认为，一般说来，这个包络不应该是矩形的。不仅如此，回顾上述的推导过程，为了产生我们期待的、大概形状为余弦脉冲的相关处理结果，要求的仅仅是信号的频谱形状，而并没有限制信号的确切波形和时间长度。我们所得到的信号包络形状，仅仅是一个特例，它是信号的所有频率分量的相

位均为零度时的一个结果。那么有没有可能在设定信号的频带宽度和时间长度后再来考虑信号的波形，这个问题的答案应该是肯定的。

根据不确定性原理，我们知道任何一个信号的等效频带宽度与时间长度之间有一个关系，那就是它们的乘积的大小的下限为 0.5。至于这个乘积的上限，可以是任意大。我们已经给出了一定意义（比较适合于数字通信）的信号频带宽度和时间长度的极限度量的乘积基本为 2，于是可以推断，这个乘积显然可以被设计成更大。当信息传输的速率被确定后，我们期待的相关处理的输出结果基本被确定，于是，信号频谱的宽度基本被确定。按照上面的论述，如果信息速率为 f_s ，信号频谱的一定意义的极限宽度为 $2f_s$ 。要求的信息速率并不排斥使用更大的信号带宽。如果我们确定了信号的带宽为 $2f_s$ ，那么信号的极限时间长度就有了一个下限，这个最小值就是 $1/f_s$ 。但是，所要求的信号带宽并不排斥把信号设计成时间长度更长。这描述了构造数字通信信号波形的某种准则。

在设计这样的信号之前，首先想问，增加信号的频带宽度和时间长度可能给我们带来什么好处。如果一点好处都没有，就没有必要去做这样的设计考虑。前面已经论述过，传输信息需要的是信号能量，确定了一定量的信息量，也就必然会要求一定量的信号能量。这样，如果使用较宽的频带宽度，信号在频域内看的谱密度就会比较低。类似地，如果使用较长的时间长度，信号在时域内看的峰值功率就会比较低。另一方面，一个信号可能有很多描述的表示形式，信号的时间、带宽乘积越大，它的描述方式也就具有越高的维数。由于在一类特定的描述方式下，彼此正交的信号是不会彼此干扰的，这就告诉我们，如果使用大的信号时间、带宽乘积，在同一时间范围和频率范围内，可能容纳下的用户数量将可以增加。由于这样两方面好处的存在，我们可以认为，在必要的时候，人们还是会提出增加信号的频带宽度和时间长度的需求的。作者认为，至少从

对抗的角度看,降低信号在频域内看的谱密度和在时域内看的峰值功率,对增加通信的生存能力,是起作用的。

假定有一个时间长度充分长的信号 $s(t)$, 其频谱为某一个函数 $f(\omega)$ 。如果现在限定信号的时间长度为 T , 一个简单的办法就是把信号与时间长度为 T 的某个波形相乘, 那么, 这个信号的频谱将成为原频谱与这个时间长度有限的波形的频谱的卷积。我们知道, 两个函数, 如果函数值非零的自变量变化范围有限, 其卷积结果非零的自变量变化的范围也必然是有限的, 为两个变化范围的和。因此, 如果把前面已经用过的信号一定意义的极限带宽当成频谱非零的宽度, 如果需要的这个宽度为 B , 卷积得到这个频谱的两个信号的频谱宽度分别为 B_1 和 B_2 , 必定有 $B = B_1 + B_2$ 。我们已经给出了一个例子, 当信号时间波形为图 5.7 (a) 那样的钟形脉冲时, 它的频谱为图 5.7 (c) 那样的一个形式, 也非常接近于一个钟形。它实际上已经告诉我们, 如果我们把信号的时间长度限定在图 5.7 (a) 所给出的宽度上, 并把这样的波形看成信号的包络, 再把信号的频带宽度也限定在图 5.7 (c) 所给出的宽度上, 那么, 我们唯一的出路将是产生信号的另一个乘积量的频谱宽度必须为零, 或者从工程意义上说, 必须为非常小。有一个这样的信号, 那就是单载频信号。这也就是为什么我们在前面把这样的时间、带宽关系确定为最小乘积的一个理由。

如果我们把信号包络的时间长度加大到任意的一个 $T > 2/B$ 的时间长度, 这个包络的带宽, 如果可以近似为 $B_1 = 2/T$, 那么其内信号的带宽, 在一定程度上就是一个带宽为 B_2 的信号, 应该满足

$$B_2 = B - \frac{2}{T} \quad (5.9)$$

为了使这个带宽为 B_2 的信号具有显然超过时间长度为我们所设定的 T , 我们可以采用任何的方法, 办法之一就是令信号各频率分量的相位随机地分布, 比如, 可以采用本书前面已经描述过的 H 信号。

只要我们使用了时间、带宽乘积大于 2 的信号波形,就可能面对这样的问题:要么由于信号带宽大了,使相关所得到的类似于余弦脉冲的宽度变小;要么由于信号的时间长了,使发射和接收的不同单元的信号发生重叠。出现前一类问题,提取信息的难度在一定意义上会加大,这是为使用宽带宽而付出的代价。这在工程实现上,一方面将表现为同步问题,因为结果的时间宽度越小,不同步可能带来的影响可能越明显;但另一方面,由于相关处理后出现的峰值仅仅出现在一个相对比较小的施加范围内,相临时间单元内的峰值的间隔在时间上相差相对比较远,使我们不很在乎相关处理后所出现的栅瓣。也就是说,我们所使用的信号单元的频谱形状,不一定需要接近如图 5.6 那样的模式。简单地说,我们可以使用平坦的频谱以提高对频谱的利用能力。出现后一类问题,在信号发生重叠时,当然会使信号的在单元时间内的功率有所增加,使我们在一定程度上得不到由于加长时间而降低信号峰值功率的好处。但是,我们至少可以结论,为了传输一定速率的信息,信号的每一个单元,在时间长度和频带宽度上,并不一定需要有一个上限。

根据这样的分析,我们可以说,无载频的宽带噪声同样可以被用作传送信息的信号单元。而且非常有意思的是,由于信息传送的速率、单元信号的时间长度、信号的频带宽度之间没有确定的必然关系,在一个完整的信号序列中,我们甚至还可以使用不同的信号单元,这样的灵活性可以帮助我们获得整个信号序列的一些其他有益的特性,比如这样的信号可以没有周期性,信号的自相关函数很难找到明确的峰值,而这可以阻止非配合者截获通信信号,获取所携带的信息。

让我们用例子来说明这样的特性。假设传送单元信息的时间间隔为 T_1 ,单元信号的时间长度也是 T_1 ,采用信号的有无表示随机排列的 0、1,对一段时间长度可能远大于 T_1 的信号做自相关,可能得到的典型结果如图 5.8 的左图所示。根据这样的处理结果,可以

明确地获取 T_1 ，而它也就是单元信息的时间长度。如果单元信号的时间长度为 $T_2 \neq T_1$ ，我们又随机地采用了两个形式不同的信号单元（在模拟例子中，我们采用的均为 $T_2 = 1.65T_1$ ）和它们的极性来表示随机的 2 比特信息，这样的一长段信号的自相关的典型结果如图 5.8 的右图所示。可以发现，从这样的结果中，我们很难确定单元信息或信号的时间长度。需要说明的是，我们模拟计算所使用的仅仅为信息单元时间长度为 100 点，整个信号的时间长度为 10000 点，给出的自相关结果为第 1000 点到第 2000 点。

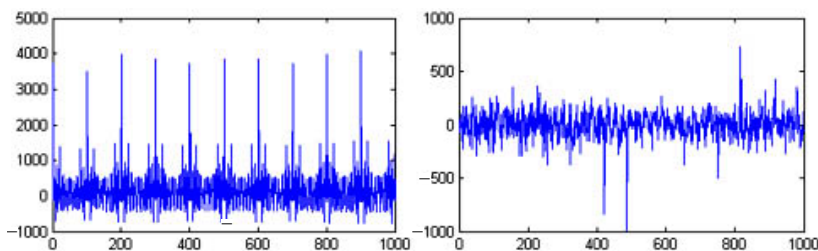


图 5.8 携带信息的噪声信号的自相关例子

当我们用宽带噪声作为携带信息的单元信号来构成通信，并用所指出的不确定关系时，称这样的通信机理为**噪声通信**。它的基本特点是，统计地看，信号的频谱在所使用的带宽范围内基本是平坦的（前面已经说明了可以这样使用），信号在时域上看每一单元的长度可能大于信息单元的长度（这使得无论截取怎样的一段信号，即使没有任何背景/干扰噪声，它也不可能是样板），更为重要的是，它并不采用固定的样板，从而使其自相关没有任何规律性的峰值。这样的特点，使通信信号的性能更接近于噪声，不同用户之间关联很少，相互影响接近于背景噪声。由于不同用户在使用的频谱位置和范围、使用的单元信号长度和波形、使用的信息传送速率没有必要具有统一的规范，微小的差别都可能带来明显的不相关性，本身就具有容量很大的同时多用户特性。我们可以称这样的多

用户制式为**元分多址**，这里的元的意义是所采用的单元信号，它的不同，当然还要连同信息传送速率的不同，可以构成不同用户使用的差别。

使用这样的方式，首先必须回答一个问题，那就是接收方怎样获得样板。在数字电路技术发达的今天，这个问题其实没有难度，作者建议两个办法：一个是我们用数学公式制造伪随机的样本序列，由于公式不是唯一的，公式中又可能包含多个参数，对于配合的接收者而言，事先记忆这些是很简单的；而对于非配合者，想要在短时间内、在有限信噪比条件下，在未知信号带宽的条件下，分析出这些参数是几乎不可能的。另一个办法是，利用大的存储容量，完全记忆在很长时间内可能重复的样板。假设样板重复的周期为 10 秒，由于信号的带宽，采样所使用的频率为 50 兆赫，需要记忆的数字也只有 500 兆，在今天，这只需要一个小小的芯片。

如果把这样的通信用多址方式来称呼，自然还需要分析、回答一个问题，那就是在一个确定的频段内，同时多用户的能力有多少。对于传统的时分、频分或码分多址，一般说来，不同用户之间的信号是彼此正交的，用户的数量可以得到最大限度的分配。但是，一旦分配了，不管一个具体的用户是否在通信，通道的那一部分能力就已经被占用了。对于元分多址，单元信号构造的因素很多，一般是彼此独立地设计的，只要我们没有系统地、精心地、详细地设计信号波形，它们彼此之间是很难完全正交的。结果，多个用户之间一般存在相互的干扰。但是，另一方面，正是由于彼此独立的选择所采纳的单元信号，它们的干扰在统计意义上讲几乎是随机性的。也就是说，用户的总数量可以超出实际能够接受的限度，只要用户没有使用，他对其他用户不存在影响。而一个特定的用户在使用时，对于另一个具体的用户，其影响也将非常接近于常规意义的背景噪声。如果说，当 N 个用户在使用时，我们的背景噪声谱密度增加了 3 分贝，那么，我们要求的完成正常通信所需要的信号的能量就将

比本书在前面分析中所给出的极限高出 3 分贝。当我们在设计中具有这样一份余量时，整个频段将允许同时有 N 个用户在使用。因此，用户数量成为一个与灵敏度关联的问题。

用统计的观点分析，且假定所有的接收机都处在同样的环境条件下，一共有 n 个用户，平均传送信息的速率为 f 比特每秒，那么在时间 T 内，总共传送的信息将为 nfT 比特，如果这个时候的背景噪声谱密度为 K ，这么大能量能够传送的信息为 $1/D$ 比特（也就是接收机在接收 1 比特信息时需要 KD 那么大的能量），那么，需要的总能量（到达接收点）应该为 $nfTKD$ 。这么大的能量，被统计平均地分配在时间 T 和带宽 B 内，将使背景噪声谱密度增加 $nfKD/B$ ，由于没有信号时的基本背景噪声谱密度为 n_0 ，我们有

$$K = n_0 + \frac{nfKD}{B} \quad (5.10)$$

或

$$n = (1 - \frac{n_0}{K}) \cdot \frac{B}{fD} \quad (5.11)$$

这个式子表明，让 K 比 n_0 大很多，并不能有效地增加用户的数量，所以我们一般就取在所有用户都工作时的噪声为没有信号时的背景噪声的两倍，这使得我们在灵敏度方面必须付出 3 分贝的代价，而结果为

$$n = \frac{B}{2fD} \quad (5.12)$$

这就是说，用户数量是一个由背景噪声谱密度的能量所能传送的信息和所使用的带宽与平均信息传送速率的比确定的。这个式子可以变化为：

$$\frac{nf}{B} = \frac{1}{2D} \quad (5.13)$$

它的意义是, 不管使用多少用户, 单位带宽内能够传送的平均信息速率是背景噪声谱密度能量所能传送的信息的数量的一半。在本书的前面已经计算过, $1/D$ 为 2.88 比特, 再扣除接收机噪声系数的绝对大小, 因为它引入了额外的背景噪声, 公式中又增加了一个系数 $1/2$, 是因为采用了类似于噪声的信号作为单元信号所付出的代价。

比如说, 如果接收机的噪声系数为 2.88, 那么, $1/2D$ 将为 $1/2$, 按上述统计的观点所推算的结果, 为了使同时用户的总信息传送速率为 10 兆比特每秒, 采用这里所说的噪声通信, 需要占有 20 兆赫兹的带宽。可以发现, 多用户状态下情形与前面给出的一个特例条件下单用户的情形是相同的。当然, 上述的假设是一个过于理想的模型, 所以实际上同时多用户的数量与通信速率和带宽的关系, 并不是这样简单的关系。但是, 从这个说明中, 可以再次看到, 在通信中带宽与通信速率的一般原理性关系就是一个正比关系, 多址仅仅是在实现过程中一个附加的结果。我们并不能通过选择多址方式, 改变总的通道的信息传输速率。

5.3 目标探测信号波形分析

目标探测属于信号在传输过程中携带信息的最常见的应用。我们发射一个信号, 接收它遇到目标时反射的信号, 然后提取目标的位置信息, 这就是我们常说的目标探测。极大部分目标探测所使用的信号为带宽不很大的脉冲调制的信号, 这具有历史的原因, 而且在一定程度上讲也是非常合理的 (由于很多工程实现上的原因)。在本书的前面部分, 已经讨论了部分与目标探测应用时有关的信号波形的某些特性, 它们在一定程度上已经包括了信号频谱的形状、频谱的宽度和时间的长度等。但是, 还有哪些与这类应用条件下的信号有关的基本状况呢? 从雷达原理的角度出发, 人们已经给出了一些约束或规律性的东西, 本书并不想重复这些内容。在本节中, 我们将脱离熟知的传统考虑, 仅仅从本书所论述的原理出发, 对用于目标探测类的信号做一

个一般的分析，并且不再重复已经陈述过的内容。

目标探测类的应用，与通信类应用很大的一个区别在于从信号中提取的信息，基本上不是已经离散化、数字化了的 0 和 1，无论从哪个角度看，得到的结果都是连续的，反射的幅度可能是任意的，时延或频移的大小也总是连续的。在前面已经陈述过，目标的位置信息在一定意义上是可能被转化为时延和频移的信息的。因此，对于这一类应用，我们总是要关注从一个混合的信号中获取时延和频移的分辨率的问题，同时又希望所获得的时延和频移在设定的范围内没有模糊，在存在多个反射时，大信号处理所存在的栅瓣在一定程度上没有把小信号掩盖掉。从这个意义上看，我们可以把目标探测分成两类：第一类是假定反射信号非常多，我们在一定意义上想获得的是目标的图像。对于这种应用，我们可以认为反射信号是在设定的范围内可能具有所有的时延和频移的、强度不同的发射信号样本的组合，在经过发射、接收处理后，我们试图得到的是整个回波信号在所有不同时延和频移上的强度。当然，对于有限的分辨率，可以在分析时人为地设定所有的时延和频移都仅仅出现在离散的、分辨率的整数倍的位置上。第二类是假定反射信号是点数的数量比较少少的情况，也就是相对于所有可能的时延和频移，仅仅只有很有限的若干个，我们想尽量准确地获得这样少数几个回波信号的时延和频移，用以计算这样有限个目标的位置、速度等。

假设，根据需要的时延分辨率和频率分辨率，我们已经获得了信号所必须的时间跨度和频谱宽度。记这样的时间长度为 T ，频谱宽度为 B 。于是，我们所使用的信号可以用 $n=2TB$ 点描述清楚。再假定，在足够长的时间序列中，这个信号被周期循环地使用，当我们分析信号频谱时，频谱发生移动时也被人为地处理成呈周期循环状。这样一来，如果发生信号的时延，就有最大时延 $T_s < T$ ，如果发生频谱平移，最大频移 $B_s < B$ 。将信号和问题都离散化，这个信号可以用 n 维矢量来表示，而混合的回波信号将是原信号样板在发生不同的、而且是离散化后的时延和频移后的叠加。也就是说，回波信

号总可以被表示为一系列 n 维矢量的和。如果我们保留时间上的分辨率为 $1/2B$ ，频率上的分辨率为 $1/2T$ ，这样的信号将有 m 个，很容易计算

$$m = 2BT_s \cdot 2TB_s = n \cdot 2B_s T_s \quad (5.14)$$

如果样本信号在时间发生上述分辨率整数倍的移动后、频率发生上述分辨率的整数倍的移动后（为分析的简单，假定这种移动是循环形的），彼此都是正交的，那么，当它们混合时，在描述信号所使用的 n 维空间内，彼此将是没有影响的。也就是说，只要我们用这些不同的信号做坐标，在不同坐标上的信号的投影就是与该坐标对应的信号的幅度，我们已经很自然地得到了具有各种不同的时延和频移的信号的幅度。

但是，在一个 n 维空间内，正交的坐标矢量最多只能有 n 个。由于扩展了时间和频率，我们现在的空间的维数已经成为

$$n_1 = 2(B + B_s)(T + T_s) = n \cdot (1 + \frac{B_s}{B})(1 + \frac{T_s}{T}) \quad (5.15)$$

在这里，相互独立的矢量最多只能有 n_1 个。因此，要想让上述假设能够成立，最起码的条件将是 $m \leq n_1$ ，或者说

$$B_s T_s \leq (1 + \frac{B_s}{B})(1 + \frac{T_s}{T}) \quad 4 \quad (5.16)$$

也就是说，能够通过处理同时获得所有 m 个不同时延和频移的反射分量的最起码的条件是，时延的范围大小与频移的范围大小的乘积不能大于 4。比如说，如果我们设计的最大时延范围为 10 毫秒，那么，可以容忍的最大频移范围将是 400 赫兹。值得注意的是，我们得到这个条件，在前面几段所叙述的状态下，与信号本身的时间长度和频带宽度没有关系，与信号的形式也没有关系。

满足这样条件的一个特例是，所采用的信号是以时间 T_s 为周期

的, 超过这个时间长度的时延出现模糊, 被认为是扣除若干个 T_s 以后所得到的尾数, 这从一定意义上说限定了时延的范围最大为 T_s 。而另一方面, 在处理以后, 我们将得到相当于以 T_s 为周期的采样结果, 用它分析信号的频移时, 最大不模糊的频移范围将是 $B_s \leq 1/2T_s$, 超过这个范围, 能得到的频移也是一个尾数。这无形之中就有效地限制了时延范围和频移范围的乘积不大于 $1/2$, 当然满足更为宽松的约束条件。但是, 这里所给出的讨论并不约束信号必须是周期的, 更没有约束信号不能覆盖整个时间轴, 或者当信号是周期时, 它的每一个周期的跨度必须小于该周期。进一步说, 从分析而不是从实现的角度出发, 我们还没有任何理由推断, 所使用的信号必须具有矩形的包络。

即使数量关系可以满足, 一般说来, 这些不同的信号矢量并不能保证都是正交的。于是, 当用投影的方法获得混合后的回波信号在各信号方向上的分量时, 我们直接得到的将不是合成信号真实的各信号的成分。不过, 对于这一点, 我们是很幸运的, 只要由这样的 m 个矢量所构成的矩阵的秩不小于 m , 就有可能构造一个变换矩阵, 推算出各信号的成分。下面的数学表示重复了这样的过程: 记各方向信号矢量为 A_i (一共有 m 个 1 乘 n 的矢量), 由这些矢量构成的矩阵为 G (m 乘 n), 混合信号为 H (1 乘 n 的矢量), 其中不同信号成分的大小分别为 k_i , 用矢量表示为 K (1 乘 m 的矢量)。于是, $H=KG$ 。既然 G 的秩为 m , 我们就很容易计算出

$$K = H \cdot G^{-1} \quad (5.17)$$

其中 G^{-1} 表示矩阵 G 的逆矩阵或广义逆矩阵 $G^T(G \cdot G^T)^{-1}$ 。也就是说, 表示混合信号的矢量乘以信号矢量所构成的矩阵的逆矩阵, 得到的就是表示在不同时延和频移的各方向信号上的信号幅度的矢量。

在工程实现上, 为了计算这样的逆矩阵或广义逆矩阵, 仅仅有矩阵的秩不小于 m 是不够的, 还要求在求逆的过程中, 问题的计算不是接近于病态的。一个单位矩阵的逆是它自身, 除了对角线以外,

所有的元素都是零，也就是说，问题各元素之间没有相互影响。而所谓病态的问题，就是当我们把各行元素的模都归一后（方向矢量的模就是1），对应的逆矩阵或广义逆矩阵的元素出现远大于1的元素。当我们将逆矩阵或广义逆矩阵乘以原矩阵时，从理论上讲，得到的结果是对角线元素为1，其余所有位置的元素均为零。但是，对于病态的问题，这些零很可能是由某些很大的数相互相减得到的。这样的状态，在工程实际中将是不稳定的。

那么，怎样才能保证所得到的需要求逆的矩阵不是接近病态的呢？记 \mathbf{G} 或 $\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T$ 为 \mathbf{B} ，它是一个方阵。因此，我们的问题也就是如何构造或判定一个方阵不是接近于病态的，而且从工程的意义出发，这个矩阵的维数可能是很大的。这个问题好像无从下手去考虑，但是，矩阵 \mathbf{B} 的每一行是样本函数经过不同的（循环）时延和频移获得的结果，任何这样的一行所表示的矢量与另一行所代表的矢量的点积将构成 \mathbf{B} 与 \mathbf{B} 的转置的乘积中的某一个元素；而根据定义，这样做两个信号点积所得到的元素值，恰好是样板信号模糊函数在各时间、频率点的结果。也就是说，如果记 $\mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$ ，那么，矩阵 \mathbf{D} 在某个位置处的元素值就是样本信号的模糊函数在某个时延和频移处的值。根据这个记号，立即可以写出

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \quad (5.18)$$

在前面已经讨论过模糊函数，而且指出，当信号特性处于某种状态时，其模糊函数成钉子状。也就是说，在这种情形下，矩阵 \mathbf{D} 主对角线的元素为1，其余元素的模都小于1，而且在位置离开主对角线不大的距离后，这些元素的模一般都相当小。这样，只要对矩阵 \mathbf{D} 的求逆不是一个病态问题，对矩阵 \mathbf{B} 的求逆也就不会是一个病态问题。

如果我们降低分辨率，信号样板的模糊函数将呈现为只有一个元素为1，其他所有的元素都相当小。这样， \mathbf{D} 就是一个单位矩阵与所有元素值都很小的随机矩阵之和。很容易表明，这样的矩阵的求逆不是一个病态的问题。实际上，它的逆矩阵也是一个单位矩阵

与元素值都很小的随机矩阵之和。但是，如果我们保留分辨率，尽管矩阵 D 似乎很接近于单位矩阵，对它的求逆就不像我们想象的那样，也会得到一个接近于单位矩阵的结果。下面给出四个数例，矩阵的维数是 10，主对角线元素均为 1，最靠近对角线处的元素均为 $k < 1$ ，例一和例二的 $k=0.3$ ，例三和例四的 $k=0.7$ ，至于其它元素，例一和例三均为 0，例二和例四为标准差为 0.1 的随机数。表 5.1 到表 5.4 给出了这四个矩阵的逆矩阵。

表 5.1 例阵一的逆矩阵

1.250	-0.417	0.139	-0.047	0.017	-0.010	0.017	-0.047	0.139	-0.417
-0.417	1.250	-0.417	0.139	-0.047	0.017	-0.010	0.017	-0.047	0.139
0.139	-0.417	1.250	-0.417	0.139	-0.047	0.017	-0.010	0.017	-0.047
-0.047	0.139	-0.417	1.250	-0.417	0.139	-0.047	0.017	-0.010	0.017
0.017	-0.047	0.139	-0.417	1.250	-0.417	0.139	-0.047	0.017	-0.010
-0.010	0.017	-0.047	0.139	-0.417	1.250	-0.417	0.139	-0.047	0.017
0.017	-0.010	0.017	-0.047	0.139	-0.417	1.250	-0.417	0.139	-0.047
-0.047	0.017	-0.010	0.017	-0.047	0.139	-0.417	1.250	-0.417	0.139
0.139	-0.047	0.017	-0.010	0.017	-0.047	0.139	-0.417	1.250	-0.417
-0.417	0.139	-0.047	0.017	-0.010	0.017	-0.047	0.139	-0.417	1.250

表 5.2 例阵二的逆矩阵

1.220	-0.330	-0.017	0.036	-0.077	-0.029	-0.045	0.054	0.061	-0.371
-0.384	1.191	-0.309	0.340	0.028	-0.001	0.312	-0.368	0.148	-0.039
0.177	-0.382	1.095	-0.460	0.038	-0.076	-0.095	0.336	-0.422	0.245
0.043	-0.021	-0.183	1.257	-0.437	0.217	-0.057	-0.160	0.181	-0.178
-0.313	0.267	-0.304	-0.387	1.329	-0.460	0.166	-0.071	0.270	0.064
0.105	-0.236	0.211	0.359	-0.517	1.303	-0.499	0.207	-0.056	-0.130
0.072	0.021	0.183	-0.268	0.085	-0.381	1.225	-0.276	-0.240	0.091
-0.108	0.227	-0.275	0.123	0.066	0.087	-0.328	1.092	-0.147	-0.110
0.067	0.104	0.086	-0.119	0.156	-0.216	0.132	-0.342	1.164	-0.296
-0.407	0.075	-0.103	-0.236	0.177	-0.140	0.201	-0.105	-0.332	1.238

表 5.3 例阵三的逆矩阵

-1.131	1.522	-1.044	-0.031	1.088	-1.523	1.088	-0.031	-1.044	1.522
1.522	-1.131	1.522	-1.044	-0.031	1.088	-1.523	1.088	-0.031	-1.044
-1.044	1.522	-1.131	1.522	-1.044	-0.031	1.088	-1.523	1.088	-0.031
-0.031	-1.044	1.522	-1.131	1.522	-1.044	-0.031	1.088	-1.523	1.088
1.088	-0.031	-1.044	1.522	-1.131	1.522	-1.044	-0.031	1.088	-1.523
-1.523	1.088	-0.031	-1.044	1.522	-1.131	1.522	-1.044	-0.031	1.088
1.088	-1.523	1.088	-0.031	-1.044	1.522	-1.131	1.522	-1.044	-0.031
-0.031	1.088	-1.523	1.088	-0.031	-1.044	1.522	-1.131	1.522	-1.044
-1.044	-0.031	1.088	-1.523	1.088	-0.031	-1.044	1.522	-1.131	1.522
1.522	-1.044	-0.031	1.088	-1.523	1.088	-0.031	-1.044	1.522	-1.131

表 5.4 例阵四的逆矩阵

-0.095	0.427	-0.218	-0.636	1.337	-1.470	0.480	0.894	-1.682	1.362
0.730	-0.201	0.474	0.060	-0.958	1.586	-1.017	-0.315	1.289	-1.304
-0.794	1.228	-0.468	0.610	0.322	-1.129	1.164	-0.345	-0.281	0.390
0.317	-1.953	2.002	-1.019	-0.239	0.923	-1.471	0.770	-0.724	0.777
0.346	1.660	-2.371	1.965	0.463	-0.543	1.036	-0.333	0.629	-1.157
-0.574	-0.517	1.330	-1.535	0.590	0.283	-0.096	-0.276	-0.081	0.619
0.358	-0.258	-0.161	0.612	-1.168	1.123	-0.276	0.438	-0.262	0.033
0.217	0.587	-0.635	0.361	1.108	-1.647	1.480	-0.041	0.219	-0.610
-0.715	-0.410	0.795	-0.826	-0.388	1.031	-1.379	0.664	0.171	0.807
0.535	-0.038	-0.270	0.843	-0.722	0.274	0.592	-1.160	1.151	-0.547

根据这几张表，我们可以清楚地看到，只有当主对角线旁的元素值比较小的时候，其逆矩阵主对角线外的元素绝对值也比较小，而且受其他小值元素的影响也不很大；而对主对角线旁的元素稍大一点的情况，其逆矩阵就离单位矩阵差距很大了，甚至主对角线上的元素也成了负值，且它们受其他小值元素的影响很大。

于是，我们发现，要想在这样的情况下使问题不是接近于病态的，关键并不是样板信号在做自相关时的栅瓣要足够小（远离主对角的元素足够小），而是相关主瓣只能在时延为零和频移为零处取 1，就是在附近，也应该迅速减小（主瓣不能被展宽），比如小于 0.3。换句话说，如果想通过大矩阵的运算，获得所有不同时延、频移点上的正确的反射幅度，并且消除它们之间的彼此干扰，我们不应该用加窗的方式，把等效信号频谱减窄，去获得小的相关处理栅瓣。这似乎与我们习惯想象的不同，主要原因可能是我们目前在工程上并不想用巨大的计算量去消除不是很小的栅瓣，这样做的代价就是牺牲分辨率。

在工程实际中，如果可能出现的时延范围与频移范围的乘积大于 4，又会怎样呢？让我们用这个乘积为 8 作为一个特例，先做一个粗略的分析，以观察会出现什么现象。假设我们同时施加两种信号（或者实际上只有一个信号，但是采用两种不同的办法处理），使得一个结果为达到在需要的在时延范围内没有模糊，但在频移范围内将出现模糊，且表现为一次重叠；而另一个结果为达到在需要的频移范围内没有模糊，但在时延范围内将出现模糊，也表现为一次重叠。这可以用图 5.9 给出的示意图予以说明，所有的时延、频移结果可以被分解为四个区。以这四个区中相对同样位置的一个点为例，将这样的四个点分别记作 a 、 b 、 c 、 d ，就可以发现，在两个结果中，分别只有两个合成的幅度，它们构成四个方程，为

$$\begin{cases} u_1 = a + b \\ u_2 = c + d \\ u_3 = a + c \\ u_4 = b + d \end{cases} \quad (5.19)$$

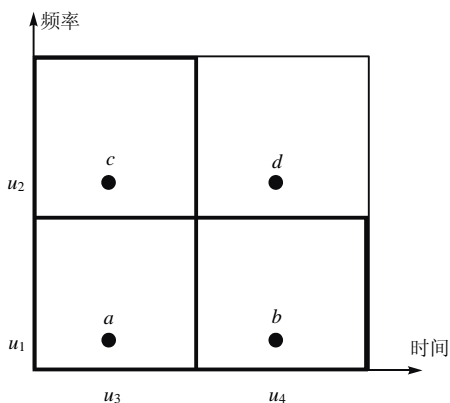


图 5.9 出现模糊时的状态

人们的错觉是，对于四个未知数，有四个方程就可以解出它们的值。但是，如果我们观察方程式 (5.19)，就可以发现，这四个方程式并不是独立的，它们所构成的系数矩阵的秩为 3。结果，这个方程组将可以有无穷多个解。比如说，设原本 $a=1$ 、 $b=2$ 、 $c=1.5$ 、 $d=0.8$ ，结果我们测量、处理得到的是 $u_1=3$ 、 $u_2=2.3$ 、 $u_3=2.5$ 、 $u_4=2.8$ ，原状态确实是方程组的一个解，但是 $a=1.5$ 、 $b=1.5$ 、 $c=1$ 、 $d=1.3$ ， $a=0.8$ 、 $b=2.2$ 、 $c=1.7$ 、 $d=0.6$ ，都可以是方程组的一个解。

进一步观察，可以得到，如果采用两个在时域和频域内分别没有模糊的分析，然后合起来求解，在时延范围和频移范围的乘积大于 4 时，都不可能获得对所有点的准确的、唯一的解。那么，在频域不模糊时，如果在时域上有几个模糊区间不相同的分析结果，是不是有可能消除时域上的模糊呢？或者与这个方式对偶，在时域不模糊时，在频域上有几个不模糊区间不相同的分析结果，是不是有可能消除频域上的模糊呢？对这个问题的回答与通过单纯时域内采样希望重构原信号是一样的。当采样频率不够高的时候，实际上是信号频谱发生周期重叠的状态，我们知道采用一定关系的两个采

样频率，有可能解决这个问题。详细的理论分析告诉我们，如果有两个等间隔的采样，合在一起，成为一个不等间隔的采样，如果这样的不等间隔采样的等效的总的频率能够高到使结果不模糊所需要的采样频率，尽管计算处理比较复杂，但是信号的重构仍然是可以唯一地完成的。因此我们可以推断，只要这两个采样频率没有简单的倍数关系，总采样几乎就是两个采样的总和，这使得等效的总采样频率明显升高，不模糊重构信号的范围当然也就同样地扩大。对应地，以时域上发生模糊举例来分析，如果两个不模糊范围没有简单的倍数关系，总范围完全可能扩大。

比如说，最大可能不重复的范围为 10，需要计算的总范围却是 16。那么，我们可能取两个不同的不模糊覆盖范围，一个为 10，另一个为 8。结果，对于以 10 为不模糊范围的结果，点 7 到 10 的结果是不模糊的。有了这部分结果，在以 8 为不模糊周期的结果中，由于点 1 到 8 与点 9 到 16 是对应加在一起的，就可以计算出点 1、2、15、16 的结果。而有了这 4 点的结果，在以 10 为不模糊周期的结果中，又可以计算出点 11、12、5、6 的结果。再返回到以 8 为不模糊周期的结果中，又可以计算出点 3、4、13、14 的结果，从而解决所有的模糊问题。

上面的例子不但解释了一种可能性，而且给出了去模糊问题的一般解法。这样，如果所需要的时延范围和频移范围的乘积大于 4，为了使问题能够得到确定的解，我们将确定某一个域不出现模糊，而在另一个域内，安排不同的、彼此不成整数倍关系的不模糊范围。而为了获得这样的中间结果，在处理信号时将需要两个或多个不同的重复周期。于是，我们要么采用非周期的信号，要么同时采用两个或多个周期不同的信号，而后者的表现也就是信号是非周期的。

如果反射信号的目标点数非常小,情况是不是还是这样呢?重新返回去看图 5.9,已经得到的结论是,在所有可能的点都具有反射时,我们无法确切地获得所有点的反射幅度信息。也就是在图中,就相关的、已经标出的四点而已,我们没有可能确切地解出 a 、 b 、 c 、 d 的信息。但是,如果在这样的四点中,只有一点是有反射的,那么,我们所得到的结果就不是随意的四个 u ,而必然有两个 u 为零,另外两个 u 为非零,但是相等。根据不同的情况,我们就可以非常确定地知道,反射的时延、频移坐标应该是什么。比如说,如果 $u_1=u_4 \neq 0$,而 $u_2=u_3=0$,那么,反射一定发生在点 b 处。这样,我们就获得了一个概念,由于反射没有发生在所有的点上,我们可能获得的不模糊时延范围和频移范围的乘积可能明显地大于前面给出的界限,比如达到 10 或更大。

实际上,当给定信号时间、带宽乘积后,信号已经可以表示成 $n=2TB$ 维的矢量,在时延和频移的某一维上看,我们将可以分别获得接近于 $1/B$ 和 $1/T$ 的范围(如果信号波形合理的话)。那么,我们是不是可能把时延范围和频移范围的乘积扩展到 $1/TB$ 呢?如果我们面临的是不超过 m 个反射点,按照上面的思路,分别在时延方向和频移方向获得反射信号的坐标,那么,这些反射只可能位于总共不超过 m^2 个坐标位置。要想从这 m^2 个可能中确认其中的 m 个,只要它们彼此不是线性相关的,这个计算就不但可行,而且能得到唯一的正确解,且其原则办法就是前面已经提到的运用逆矩阵或广义逆矩阵。这样,我们就得到一个约束条件,那就是 m^2 不能大于 n 。用语言陈述,在反射点数量不大于信号时间、带宽乘积的两倍的平方根时,将有可能把所有这些反射点的反射的时延、频移位置确定下来,而且允许的不同反射的总时延范围和信号频移范围基本接近 $1/B$ 和 $1/T$ 。

我们在这里分析的仅仅是一种可能性,并没有能够给出证明,说这样的性能是一定可以实现的,因为这显然还与信号有关。然而,

到目前为止，这里所陈述、讨论的任何机理，都没有要求信号必须是脉冲制的、或者信号必须具有矩形的包络、或者信号必须是周期性的等等，当然也没有相反的要求，说信号不能是脉冲制的、或者不能是具有矩形包络的、或者不能是周期性的等等。还有，当我们观察一段时间的信号时，也并没有要求前面部分的信号与后面部分的信号之间有任何必然的关系，比如说，假设信号具有稳定的载频，并不一定要求这样的信号的相位是接续的。只要信号的频谱包络和时间包络基本是平坦的、或者具有某些特殊窗口形状、或者当信号是时间上间断时分别是这样的，就可以认为它们是用于探测目标的可行的信号。必要的带宽和时间跨度分别是为了满足处理在时延和频移上的分辨率。

5.4 信号发射时携带的源位置信息

假设我们所面对的是一个无限、均匀的环境，一个电磁信号一旦辐射，从稍远一点的地方观察，电磁场将呈现为一个球面波。因此，信号一旦辐射，就掩盖不住这个源的位置信息。但是，对于我们面临的绝大多数实际问题，接收点离源的位置相当远，我们所接收的电磁波基本上已经蜕化为一个平面波。在接收天线不是非常小时，相对地说，我们比较容易获得进入信号的粗略方向，却几乎没有办法获得信号来源的距离信息。因此，怎样获取信号的位置信息，就成为在从信号中提取各种信息的一个重要内容。

实际上，当源和接收机相对静止时，由于没有机理可以获取距离信息，我们不可能完全地确定源的位置。但是，当源和接收机具有相对运动时，或者有多个接收机时，多个方向信息实际上就必然包含了位置信息。人们已经习惯测角交叉定位和测时差交叉定位，在一定程度上讲，它们的定位概念都是：以一个测量给出一个轨迹，多个测量给出多个轨迹，这些轨迹的交集将反映为源的位置信息。要使源的位置具有确切的意义，我们的坐标系似乎应该与源是相对

静止的,但是,由于我们并不清楚源的运动状态,所以只能以相对于某个接收机(或单个接收机的某个特定时刻的位置)固定的坐标系来分析问题。特例之一就是,源是固定、不运动的,而接收机在运动,这也相当于有多个位于不同位置的接收机。另一个特例就是所有的接收机都是固定的,而源在做运动。因此,如果不再用传统的观念来分析定位,实际上就是要分析源的位置信息是怎样反映在不同的测量上的。

前面已经简单分析过合成孔径雷达成像的基本原理,指出怎样从时差和频移两维上获取与径向距离和切向距离对应的几何上两维的位置信息。对于我们在这里所提出的定位,情况有一点差别,这个差别主要是,我们手头没有源所发射的信号的样板。如果有样板,通过对时间差的提取,立即可以得到源的距离信息。但是现在,源的位置信息只可能反映在不同位置接收时源的方向角不同,如果源相对于接收机处于连续运动的过程中,源的位置还可能反映在不同位置接收时源的多普勒效应不同,或者说,不同位置所接收的源的频谱的位置不同。

下面首先分析位置对测量得到的角信息的效果,然后从这个效果出发倒转回去,根据角信息推算源的位置信息。为了简化问题,不妨假设接收机的不同位置处在一条直线上,均匀分布,总共有 m 个,它们相对于源的总的张角不太大,比如不超过 60° 。以 $m=11$ 为例,且假设 m 个接收机的位置坐标均在 x 轴上,它们的 y 坐标分别为 -25 、 -20 、 -15 、 -10 、 -5 、 0 、 5 、 10 、 15 、 20 、 25 (单位为千米)。再假设目标位置分别为 $(0,200)$ 、 $(0,190)$ 、 $(0,180)$ 、 $(10,180)$ 、 $(20,180)$ 、 $(20,190)$ 、 $(20,200)$ (单位为千米)。注意这不同的 7 点主要的差距是分别在 x 坐标和 y 坐标上有 10 的跳跃,或者说分别在切向和径向上有距离的跳跃,在没有测量误差的情况下,将测量所得到的 11 个方位角连成一条曲线,对应的 7 条曲线的状态如图 5.10 所示。首先,可以看到这 7 条曲线是不相同的,它告诉我们,

这些曲线的形状和位置反映了源的几何位置信息。

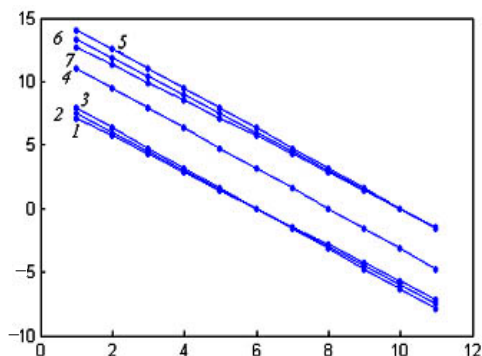


图 5.10 与源的不同位置对应的方向角

在图 5.10 中，曲线左端的序号对应依次给出的源的位置。仔细观察可以发现，这些方向的测量结果与序号或接收的位置基本上呈线性变化。而一个线性变化可以用两个参数来描述，那就是它们的平均值和变化斜率。这些曲线似乎反映了某种规律，1、2、3 和 5、6、7 之间的变化主要表现在径向距离上，它们表现为线的斜率不同；而 3、4、5 之间的变化则主要表现在切向距离上，而它们表现为线的均值不同。因此，我们是不是可以说，这些测量的均值反映了源的切向位置，而这些测量的斜率反映了源的径向位置。

下面用数学式来说明这个概念。设接收机顺序的位置为 $x_i = i \cdot d$ ，其中的 i 从 $-(m-1)/2$ 到 $(m-1)/2$ ，目标位置为 (x_0, y_0) 。于是， m 个方向角（以平行于 y 轴方向为零，顺时针方向为正）为

$$\theta_i = \arctan\left[\frac{x_0 - x_i}{y_0 - y_i}\right] = \arctan\left[\frac{x_0 - i \cdot d}{y_0}\right] \quad (5.20)$$

按台劳级数展开，舍去二次项以上的高次项（读者可以自行分析出什么时候这样的近似可以被认为是足够好的）：

$$\theta_i = \arctan\left[\frac{x_0}{y_0}\right] + i \cdot \frac{-d \cdot y_0}{x_0^2 + y_0^2} = \theta_c + i \cdot \frac{-d \cdot \cos(\theta_c)}{R_c} \quad (5.21)$$

这个式子清楚地表明，这些方向角的均值（前一项）指向源的方向，而它的斜率（后一项），除了与方向角有一个余弦关系外，反比于接收机到源的距离。

反过来，如果已知在给定条件下方向角的均值为 θ_c ，斜率为 K_x ，立即可以求出目标的距离约为

$$R_c = \frac{-d \cdot \cos(\theta_c)}{K_x} \quad (5.22)$$

非常有意思的是，这里根本就没有使用一般意义的交叉定位的概念，但是结果却非常清晰、简单。

用这样的概念来看多次测角交叉定位所可能引起的位置误差，可能比复杂的误差分析要简单很多。仍然以上面所使用的例子为例，假设测角的误差为均方根误差 1 度，那么我们可能以多大的距离误差可以将源的位置推算出来呢？用交叉定位的概念，这个误差的估算非常烦琐，所以用模拟来估计。假设目标的方位角（上述意义的）为 20 度，距离为 150 千米，反复模拟 5000 次，统计切向和径向的误差，分别如图 5.11 中的左图和右图所示，它们的均方根误差分别为 0.78 千米和 8.53 千米。

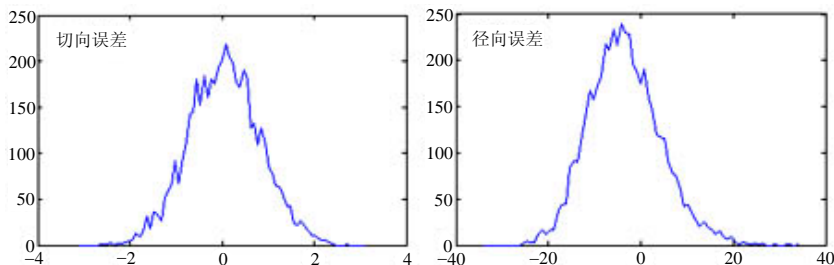


图 5.11 模拟获得的定位误差分布

如果采用上面的解释，可以认为对于有限的 11 次测向，尽管所有的误差都呈标准的正态分布，且都具有相同的标准差 1 度，但是，它们依然会残留一部分均值分量和一部分斜率分量。用最小二乘的方式，可以计算这些分量的大小为：

$$\begin{cases} \Delta\theta = \frac{1}{11} \sum_i \Delta\theta_i \\ \Delta K = \frac{1}{110} \sum_i (i \cdot \Delta\theta_i) \end{cases} \quad i = -5, -4, \dots, 4, 5 \quad (5.23)$$

于是不难推算，均值分量的大小具有 $1/\sqrt{11}$ 度的标准差，而斜率分量具有每点 $1/\sqrt{110}$ 度的标准差。根据这个理论推算结果，可以导出，定位的切向均方根误差大约为 0.79 千米，而径向均方根误差大约为 7.97 千米。这样的结果与前面给出的模拟的结果非常吻合，相对差别不过只有 1.3% 和 6.6%，而且根据图形可以看到，后者误差所以稍大，是因为误差分布是有一点偏的，而这又是由于计算的非线性造成的（我们实际计算的是距离的倒数而不是距离）。

根据上面这个例子，不但看到了新的概念给出了非常方便的计算，而且，在考虑工程上怎样才能获得好的定位精度时，我们真正希望控制的其实不是测向的均方根误差要足够小，而是把所有的测向误差排列起来以后，它们的均值和斜率应该尽可能的小。非常有意思的是，在工程实际中，两个不同的具体设备，均方根误差小的并不一定保证多次误差的均值和斜率一定小，从而也就不一定保证定位误差更小。相反，即使有相对比较大的均方根误差，如果这样的多次误差的均值和斜率非常小，而且根据上面的例子，可以知道，尤其是斜率非常小，结果的定位误差仍然可能非常小。在本书的前面曾经讲过，定位的结果其实信息量并不很大，这里在一定程度上给出了一个对应，我们需要控制的测量只要在关键处到位，定位的效果就能相当好。

这样的概念显然可以进一步推广,成为在单纯测向时,运动侦察站对运动目标测距的理论依据。式(5.22)所代表的概念实际上是,目标的径向距离应当是侦察点与目标相对速度在切向的分量的大小与测量所得到的相对角位置的速度的大小之比。由于这是一个概念性的东西,它既反映了这两个量之间的瞬时关系,也反映了这两个量作为时间变化函数时的关系。于是,我们可以这样说,如果将方向角随时间的变化分解,成为不同的分量,每个分量对应一定的、彼此正交的时间变化形式,同时,将相对运动的切向速度也进行同样形式的分解,那么,对于其中的任何一个分量,切向速度变化的大小与方向角变化速度的大小的比值都应该是目标的距离。之所以引入这样的说法,是因为这里的速度是相对速度,涉及到侦察点和目标,而目标的速度是未知的,因此,我们只能从其中寻求、推猜其中目标切向速度分量相对于侦察点切向速度分量小很多的那些分量,利用它们来计算目标距离。

引入这样的概念,虽然一切计算都将需要一定的时间跨度,但是,只要这样的时间跨度所引起的目标真实距离偏离这段时间的平均距离相对小于误差,将认为距离是一个定数而可以采纳这样的方法。而且,随着时间的向前推移,这样的一段时间是向前滑动的,数据率的给出并不被限定在一个时间跨度只允许有一次输出上。

仅仅提取多普勒频率,对于相对运动的源,是否也可以确定位置信息呢?由于我们无法事先确切知道源的频率信息,因此,只能通过比较不同的接收机,获得相互之间多普勒频率之差,作为推算源的位置的出发点。为了分析的简单,我们再将二阶频率差信息做一个处理:由于各接收机都测量了信号频率,我们将可以估计信号的近似频率,以这个频率为基准,可以把二阶频率差转换成朝向各接收机的径向速度差。这里会出现微小的误差,但是我们先这样的小误差忽略掉,因为这个误差的相对量大小也就是对信号频率估计的误差的相对量大小,由于多普勒频率是一个相对的小数,估计

信号频率的相对误差通常是可以忽略的。

如果只有两个接收机，所获得的一个径向速度差测量并不能给我们有任何的源的位置所在处的轨迹。这是利用二阶频率差或径向速度差对源进行定位与所有形式的交叉定位的最大差别，使得我们无论如何不能用解析几何来求解。但是，当我们有多个接收机，获得多个径向速度差的时候，情况发生了一些变化。设有 n 个侦察站，它们的坐标位置分别为 (x_i, y_i) ，而目标的位置为 (x_0, y_0) ，不失一般性，假定所有的对象都在运动，速度在两个坐标轴上的分量分别为已知的 v_{xi} 、 v_{yi} 和未知的 v_{x0} 、 v_{y0} 。于是，目标相对于侦察站的方向为：

$$\theta_i = \arctan\left[\frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}\right] \quad (5.24)$$

对应的径向速度（以接近为正）为：

$$v_i = (v_{xi} - v_{x0}) \cdot \cos(\theta_i) + (v_{yi} - v_{y0}) \cdot \sin(\theta_i) \quad (5.25)$$

把速度分量看成某种坐标分量，并记：

$$\gamma_i = \arctan\left[\frac{v_{y0} - v_{yi}}{v_{x0} - v_{xi}}\right] \quad p_i = \sqrt{(v_{xi} - v_{x0})^2 + (v_{yi} - v_{y0})^2} \quad (5.26)$$

那么，式（5.25）就可以被改写为：

$$v_i = -p_i \cdot \cos(\gamma_i - \theta_i) \quad (5.27)$$

不妨以第 n 个站为基准，我们已知的径向速度差就是：

$$v_i - v_n = p_n \cdot \cos(\gamma_n - \theta_n) - p_i \cdot \cos(\gamma_i - \theta_i) \quad (5.28)$$

式（5.24）、式（5.26）、式（5.28）构成了一个方程组，用式（5.24）、式（5.26）消去为了使式（5.28）看起来简单明了而定义的参数，将剩下 $(n-1)$ 个方程，包含目标位置和速度共 4 个未知数： x_0 、 y_0 、 v_{x0} 、 v_{y0} 。于是，可以推测，当 $n > 4$ 时，就有可能解出这 4 个未知数，当

站数更多时,将可以按照某种最优解的意义解出这4个未知数。这里,我们可以定义最优的意义为代价函数最小,而这个代价函数可以是径向速度差的偏差的平方和,也就是按照式(5.24)、式(5.26)、式(5.28)由假定的4个未知数计算得到的径向速度差与实际测量得到的径向速度差的误差的平方和,这个代价函数可以写成:

$$Q = \sum_i [p_n \cdot \cos(\gamma_n - \theta_n) - p_i \cdot \cos(\gamma_i - \theta_i) - \Delta v_{in}]^2 \quad (5.29)$$

需要特别指出的是,如果目标是固定的,将等价于我们确切已知目标的运动速度,未知量的数量由4个减少到2个,这将对问题起到很大的简化作用。实际上,这个简化从形式上看似乎就是非常明显的,因为这么一来,式(5.28)中的 p 和 γ 就完全成了已知量,形式上看,式(5.28)中只剩下了一批未知量 θ 。而如果所有的侦察站都是固定的,至少,式(5.28)中的 p 和 γ 就成为定数,问题也略微有所简化。至此,问题已经被我们转换为某个意义的代价函数的求极问题。

为了给读者一个概念,下面给出一个简单的、人为设定的例子,定位的配置如图5.12所示,图中的距离单位为千米。为了观察到定位的效果,我们计算了理想测量条件下代价函数偏离0的等高线图,如图5.13所示,其中的代价函数被定义为径向速度差偏离理想状态的误差的平方之和,单位为 $(\text{m/s})^2$ 。图中相临等高线的间隔为0.1,总共画出了50条等高线。可以统计地推算,第5条曲线所圈的范围就是对应的在这个速度和位置上,当测量误差大约为 $1/3\text{m/s}$ 时的定位误差范围。这里,给出了两种情况的结果,其中左图的速度方向为 x 轴方向,而右图的速度方向为 y 轴方向。注意左右两张图的坐标刻度是不一样的,一个横坐标尺度比较大,而另一个纵坐标尺度比较大。可以明显看到,速度方向不同时,误差分布是不相同的。当速度沿 x 轴方向时,大误差方向接近 x 轴方向,而当速度沿 y 轴方向时,大误差方向接近 y 轴方向。

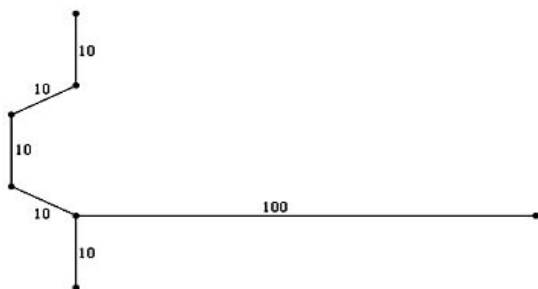


图 5.12 利用二阶频率差定位的配置一例

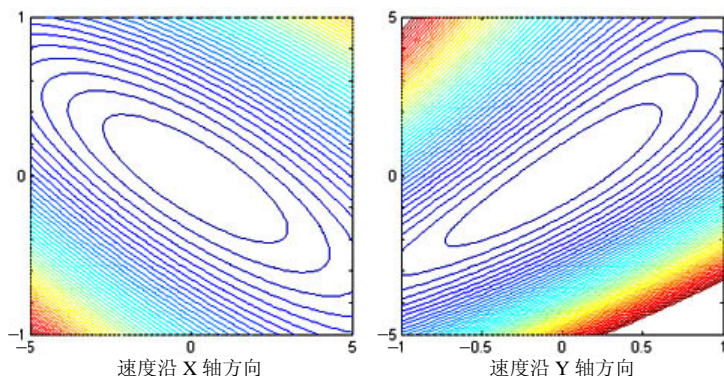


图 5.13 图 5.10 示例的代价函数的等高线

5.5 关于应答方式的应用

在各种具体的应用中，我们可能面对这样一种方式，它由甲、乙双方组成，甲先发射一个信号，乙在接收到这个信号后回复一个信号，甲在接收到乙回复的信号后提取所携带的信息。这样的应用可以看成是对发射者的一种应答方式的应用。在这类应用中，乙送往甲的信息可能有这么几种：一是反映我是谁，最简单的就是用 0 或 1 代表的一个比特信息，比如我是敌人还是朋友；二是反映我在哪里，其中最简单的仅仅是反映我离你有多远；三是给出一系列的

具体信息内容，比如可以是一系列的 0 和 1，相当于完成某一种通信功能。

应答方式应用的一个最大特点是，乙回复的信号形式比较特殊，它一定与甲发射的信号有关，使得与甲无关的第三方难以从乙回复的信号中提取对应的信息。当然，如果甲发射的信号强度足够大，而任何第三方又很容易从接收到的信号中提取这样的强信号，那它的地位就几乎等同于甲。因此，一般说来，甲所发射的信号应该不容易被任何第三方获取，要么信号平均强度很低、要么甲定向地向乙发送信号、要么乙距离甲很近，等等。本节并不讨论这类信号的具体形式和实现这类应用的具体方法，而仅仅讨论用什么原则让乙携带想传送给甲的信息。

传送一个比特或稍微多几比特的我是谁之类的信息是属于信息含量最少的，考虑到双方的位置未知、相对运动状态未知，我们不能单纯地用信号的小时延和小频移来携带信息；再考虑到其他不可控制的反射或无意识应答的存在，我们甚至不能原封不动地反射原信号。于是，基本的考虑就是，根据原信号确定（或近似地确定）一种信号的描述方式，在这样特定的描述方式中，用一种方式表示 0，用另一种方式表示 1，如果确实只传送 1 比特，也可以用没有回复表示默认的 0 或 1。由于原信号本身无疑已经是该信号特定描述方式中的一个坐标信号，所以我们想用来代表 0 或 1 的信号应该是与它正交（或基本正交）的、彼此也正交（或基本正交）的任何两个坐标信号。当信号具有一定的时间、带宽乘积时，描述该信号的维数一般是相当大的，仅仅限定它的某一个坐标信号，求与它正交或基本正交的一个或少数几个坐标信号的解的数量仍然是相当大的。要让这样的应用能够实施，还需要更确定、更具体的办法，而这样的办法显然可以有很多。因此，这种传送我是谁的信息原则上是非常专门的。

比如说，甲发射的信号的时间跨度可能很长，或根本就是连续

的，而乙回复的信号是将原信号存储一段比较长的时间（明显超过信号在甲、乙之间来回传输所需要的时间）后再发送回去。只要发射的信号具有比较好的自相关特性，在可能的时间内被延迟后与自身都基本不相关，那么，甲在接收到信号后与原信号做相关，将在信号被乙延迟的位置附近获得一个相关峰，确定乙的回复。为了更可靠、更专门，这个延迟时间还可以具有某一个双方约定的、随时间或地点变化的特定的规律，使无关者更难截获所发生的信息传递。比如说，可以采用某种方式，将原信号的频谱整个倒置，再发送回去。在甲自身就准备这样一个频谱倒置的样本后，就可以通过积累、以高灵敏度获取这样的信号所携带的一比特的信息。而倒置的实现，也不需要还原原信号，只需要用低本振变频移动信号频率，再用高本振变频将频率移回去。再比如说，可以将原信号以一定的周期作交替的同相、反相调制，再发送回去。甲可以用相对比较短的小段样板信号为样板，对长时间的信号连续地积累，结果将出现同样周期的一个振荡。由于调制的周期是双方事先约定的，这个特殊频率的振荡可以被检测出来。

这样应用的信号甚至可以是一段完整的编码，可以设想它代表某一个数，甲发射的是某个数，乙回复的是另一个数，这两个数一般是不同的，我们可以用一定的规律计算这样的数，以确定的一一对应的规律来代表 0 或 1。举一个例子来说明这样的应用，比如说，我们取质数 19 为这样的数的范围，甲可以发射从 0 到 18 的任何一个数，而乙的回复是这个数在乘 5 后再加 3 并取除 19 后所得到的尾数。这样与甲对应的回复将依次为 3、8、13、18、4、9、14、0、5、10、15、1、6、11、16、2、7、12、17。熟悉数论的读者很快可以理解其中的规律，并构造出更多种类的对应方法。当所设定的数的值很大时，其效果相当于表示信号的维数很大。

不论用前面举例给出的哪一种方法，与传统的敌我识别不同的是，乙一般并不需要将甲的信号检测出来才能给予回复，因此甲的

发射功率可以很低，而甲因为仅仅需要提取乙发送的 1 比特信息，对乙只有能量要求而没有功率要求，使乙发射的功率也很低。让我们估计一下举例所提出的第一种方法所需要的等效辐射功率以获得这种仅仅根据原理性的概念所设想的方法的优点。设甲、乙之间的距离为 100 千米，信息的传输发生在自由空间中，双方接收天线的等效口面为 -20dBm^2 ，因此，空间传输发生的损耗大约为 131 分贝。再假定双方的等效发射功率为 P （以 dBW 为单位），信号的带宽为 B （以 dBMHz 为单位），被用来积累的信号时间长度为 T （以 dBs 为单位），接收机的噪声系数为 6 分贝。当甲发射信号后，到达乙的接收机，信号强度将只有 $P-131$ （以 dBW 为单位），而噪声功率却是 $-144+6+B$ （以 dBW 为单位），也就是信噪比为 $P+7-B$ （以 dB 为单位）。当这个信噪比很高时，乙发射的信号都是有效的，而当这个信噪比很低时，乙发射的信号的有效部分可以被认为比实际功率低这个分贝数的相反数再稍多一点（这里按 1 分贝计）。估计小功率发射情况（在 $P+7-B < -5$ 时），认为乙发射的有效信号的等效发射功率大约为 $2P+6-B$ （以 dBW 为单位）。不以传输 1 比特所需要的极限能量来估算，而是用第 2 章中所叙述的检测灵敏度来估计，取比极限所需要的高出 18 分贝计，在假设接收的噪声系数大约为 6 分贝时，我们需要的被接收的信号能量至少比背景噪声谱密度高 24 分贝。而现在的背景噪声由两部分组成，一个是背景中原来存在的 -204dBJ ，另一个则是由乙发送过来的，在乙发射的信号主要是噪声的情况下，这份背景噪声将是 $P-B-131$ （以 dBW/M 为单位）或 $P-B-191$ （以 dBJ 为单位）。而乙回复的信号的有效能量为 $2P+6-B+T$ （以 dBJ 为单位），到达甲的接收机处成为 $2P+6-B+T-131$ （以 dBJ 为单位）。于是，我们的要求就是能量 $2P-B+T-125$ （以 dBJ 为单位）比 -204dBJ 和 $P-B-191$ （以 dBJ 为单位）的总和至少要大 24 分贝。两份分量的和比它们中间比较大的那一个最多只能多 3 分贝，因此，如果比两者分别都大 27 分贝，那么结果一定比两者的和要大 24 分

贝。所以我们的这个要求就可以转化为同时满足 $P > -26 + (B - T) / 2$ 和 $P > -39 - T$ 。假设信号带宽为 5 兆赫兹 ($B = 7$)，有效积累时间为 10 毫秒 ($T = -20$)，这两个条件就成为 $P > -12.5(\text{dBW})$ 和 $P > -19(\text{dBW})$ 。以 $P > -12.5\text{dBW}$ 计，就是发射功率至少需要 60 毫瓦。也就是说，根据上面所论述的原理，仅仅使用 60 毫瓦的等效发射功率，就可以实现大约 100 千米范围内的敌我识别。由于信号在 100 千米内来回所消耗的时间还不到 1 毫秒，如果我们约定的信号时延为 10 毫秒，自然反射对我们不会发生干扰。我们所采用的信号形式可以是 5 兆赫兹带宽内的噪声，处理信号需要做的相干积累将是总共 10^5 点，可以用本书后面论述的办法完成。

对于通过应答来传送我在哪里的信息，由于信息含量也不多，状态与传送我是谁相当接近，并不复杂。比如说，在单纯传送我有多远这一信息时，几乎可以沿用上面的办法。为了避免自然反射所引入的干扰，同样可以把回复的时间和频率都做一个固定的移动，甲在接收后处理时，可以事先考虑这份移动的因素，获得正确的信息。非常有意思的是，如果我们需要传送的有多个比特的信息，比如确切地报告乙的绝对位置参数，只要甲所发送的信号具有钉子状的模糊函数，在相关处理时，我们获得频移信息不会发生模糊，就可以用不同的频移代表不同的位置信息。当然，如同在前面给出的更多可能的方式，在传送稍多一点信息时，我们有可能采用的具体方法也将是多种多样的。

通过应答传输更多的信息，其使命相当于通信。不过，我们并没有使用一般意义的通信，而是特定地使用甲所发送的信号为某种意义的样板在进行通信。原样采用甲发送的样板信号为乙使用的样板是最简单的情况。移动样本的频谱，可以作为新的样板，只要移动的度量是双方约定的，效果与没有移动是一样的。将样板频谱倒置，或进行更复杂、但是固定的变换，也可以构成新的样板。这个样板显然可以是时变的，对于未知样板的接收方而言，信号中所携

带的信息将几乎是无法提取的。由于样板是临时获得的，必然出现双方需要对构成单位信息的码元时间长度的统一和对码元起始时间的统一。对于码元时间长度，可以是双方约定的（这种约定也可以是时间和地点的函数），所以我们在实现时关注的仅仅是码元起始时间的统一。在整个通信中，可以规定必要的协议，其中包含一段信号，携带双方已经确定的固定信息，转发原信号，这样，在接收处理中就很容易对这样一段特殊的信号进行相关处理，获得信号在甲乙之间来回传输所消耗的时间和某一个具体码元的起始时间。如果经过一段时间，这样的时间统一发生了漂移，可以重复进行，修正掉所发生的漂移。如果信噪比较大，而且信号形式是脉冲状的，检测出脉冲的前沿就可以更简单地完成对信息码的时间统一。

这样的应答式的通信的最基本的、最具有特色的好处，与常规的自主发射信号的通信相比，仅仅是处理所必须的样板可以随意变化，不需要事先约定。所以，它具有良好的保密性能和不容易被非配合方截获的性能，我们为之而付出的代价在一定意义上是为了换取这样的好处。同时，如果这样的方法在实际中有意义的话，也一定发生在样板信号不容易被非配合方获取的场合。因此，我们仅仅面对两种可能性。一种是在使用这种方法时，乙原则上是不需要将样板提取出来的。这样，我们将必须接受，即使对于乙，接收到甲发送过来的信号，信噪比也一定是不高的。这显然会浪费乙发射信号的效率。假设乙接收的信号的信噪比为 -10dB ，在接收到的信号中，只有 $1/11$ 是样板信号，那么在乙发射时，有效的信号的功率也只占整个发射功率的 $1/11$ 。在这种情况下，浪费功率或能量就是我们所付出的代价。而另一种则是，乙所使用的样板必须是对甲所发送的信号经过约定的变换生成的。由于变换方式是双方事先约定的，形式之多可以说是非配合方无法简单获得的，它不需要以信号功率为代价来换取这里出现的非配合方无法获得样板的效果，但是却是以某种形式的复杂为代价的。

不管怎么样，通信的双方至少存在两个发射，从这个意义讲，我们所消耗的发射功率还是出现了相当明显的浪费。如果我们处在一个网络中，很多方具有复杂的相互关系，那么，所提到的发射功率的浪费将明显减少。因为，某一个乙方在发射信号给它的甲方时，所发射的信号一方面为它的甲方提供了携带信息的载体，而另一方面也给以它为甲方的乙方提供了样板。这样，总的对信号的利用率是有所提高的。如果所发射的信号原本具有别的应用意图，我们只不过是采用应答式的通信的方式，在一定限度内改变了信号的形式，那么，我们实际上是用一份信号功率同时完成了不同的信息携带的使命。在这样的使用下，不存在对信号功率利用的效率问题，或许也是我们在工程中比较乐于接受的，但是它又是以把所有的应用联系在一起，以一个大系统的形式设计为代价的。

5.6 接收机灵敏度

无论用什么方式让信号携带信息，在接收端信号的能力是有一定限度的，为了携带必要的信息，信号必须有一定的能量。在实际使用中，我们永远面对一个基本问题，那就是在接收端信号多微弱时，预期的信号携带信息的使命仍然能完成，也就是我们通过处理，依然获得了在这样的具体使命下信号所携带的信息。在本书中，我们把这个信号微弱的程度定义为灵敏度。第2章中已经讨论过关于判定信号有无的灵敏度问题，在本节中，我们想把这个问题更一般化，从完成携带信息这样的角度再次讨论接收机的灵敏度问题。由于用携带信息这个角度来分析，我们已经知道，不但计量灵敏度使用的是应该信号能量，而且相对的参考是背景噪声的谱密度，所以我们期待，本节所获得的结果也应该是用能量计量的、是相对于背景噪声的谱密度的。又由于获得信息这样一件事是与概率有关的，我们又可以期待，灵敏度也必然是与结果的正确程度的概率有关的。我们特别想关注的是，信号的频带宽度与时间跨度，是否会对

灵敏度起作用。

我们把具体的应用分为两大类，第一类是在处理信号、提取信息时手头具有信号的样板，把它称为配合类的应用；第二类是在处理信号、提取信息时手头没有信号的样板，把它称为非配合类的应用。存在这样一种可能性，本来接收机手头是没有信号样板的，但是由于样板的规律简单，而且是固定的，随着使用时间的消耗，接收机有可能提炼出信号样板，状态由第二类过渡成第一类。对于这样的情形，我们不妨认为灵敏度是时间的函数，它在随时间发生变化。因此，我们在分析时仍然认为只有简单的两类。

当确知信号样板时，也就是可以明确信号描述方式，假设信号时间长度为 T 、频带宽度为 B ，这种描述将是 $n=2TB$ 维的。对于这种特定方式的描述，如果信号携带 1 比特信息，它将被描述为其中的某一维；而如果同时携带 k 比特信息，它将被描述为其中的某 k 维。信号在这样的一维上的幅度用能量来度量，将是整个信号能量的 $1/k$ 。在其他所有维上，信号的分量均为零，在分析过程中将不予理会。这样，可以马上看到，灵敏度与携带的信息量成正比（信息量越大，灵敏度越低）。如果我们不想涉及到信息量，可以提出用每一比特多少能量的方式来描述灵敏度，记这样的灵敏度为 S_w （单位焦耳每比特）。记背景的谱密度为 P_0 ，其单位为每赫兹多少瓦，或者多少焦耳。对于时间长度为 T 、频带宽度为 B 而言，总的背景噪声的能量将是 P_0TB 。假设在所出现的、特定的信号描述方式中，其能量是统计地平均分布在所有可能的维上的，那么，在我们所面对的特定的某一维上，这个背景噪声的能量将是 $P_0/2$ 。于是，可以得到，在确知信号样板时，灵敏度可以与信号的时间长度和频带宽度无关。不管有信号还是没信号，所面对的是两种具有随机性的分布，如图 5.14 所示。为了获得具体的一比特是 0 还是 1，需要在这个表示中设置一个门限，这也被标识在图中。于是，可以看到，无论门限在哪里，都可能出现错误。如果假设信息表现为 0 和 1 的

概率相同,那么,图中左半面的阴影与右半面的阴影的平均将是错误概率。从图上可以明显地看到,要想使出现错误的点概率最小,门限应该在两个概率曲线相交的位置处。

按背景噪声在某一维的分布为正态分布考虑,就可以写出出现这样的最小错误概率与灵敏度的关系:

$$E_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_w/P_0}^{\infty} \exp(-x^2/2) \cdot dx = h\left(\frac{S_w}{P_0}\right) \quad (5.30)$$

或者灵敏度与错误概率的关系

$$S_w = P_0 \cdot h^{-1}(E_r) \quad (5.31)$$

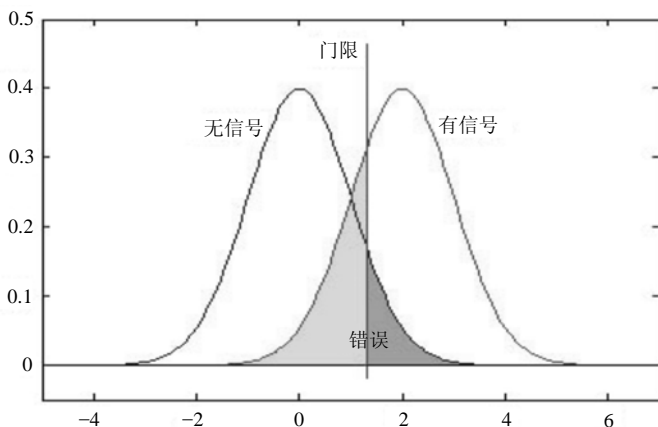


图 5.14 有无信号时相关维上的信号能量

这里函数 h 为所给出的概率密度函数的积分,而 h^{-1} 表示它的反函数。它的若干典型值如表 5.5 所列。根据这张表,可以看到,当错误概率为 1% 时,灵敏度大致是背景噪声谱密度的 2.3 倍。与第 2 章我们讨论过的信号极限能力相比,这样意义的灵敏度大约比携带 1 比特信息的最小信号能量要大约 $2.3 \times 2.88 \approx 6.6$ 倍,或灵敏度大约低 8.2 分贝。

表 5.5 函数 h 的典型值

E_r	0.1587	0.1	0.0668	0.0228	0.01	0.0047	0.001
$h^{-1}(E_r)$	1	1.2816	1.5	2	2.3263	2.6	3.0902

我们可以把这样的接收机灵敏度当成某种意义的参考对象，它与信号的频带宽度和时间长度是无关的，并且是以在接收机处度量的背景噪声谱密度为基准度量的。一个实际接收机所达到的灵敏度首先与接收机的噪声系数和使用环境有关。因为对于一个具体的接收机，所给出的背景噪声的谱密度一般不是我们常用的天空背景噪声谱密度 -144dBW/MHz ，它受具体条件的影响，可能会略大一点，再考虑到接收机的噪声系数，还要再增加一个倍数。还有，一个具体接收机在应用中所采纳的、实际容忍的错误概率并不一定是我们举例给出的 1%，在不少应用中，它比这个要大，而在某些仅仅获取 1 比特结果的应用中，1% 又成为不能容忍的大。我们在第 2 章中给出的检测信号有无的判定中，一般就要求错误概率比 1% 要低得多，所以，那样考虑条件下的灵敏度应该比上面给出的参考要低。

工程中一个真实的接收机，并不一定能够采用我们所说的办法，从数学上构造一个理想的、与信号匹配的高维描述，因此，其效果也不一定能够达到上述分析的状态。我们能够实施的往往是对信号的各种解调和数字变换处理，它们可能是某种条件下的最优，也可能仅仅是实现上的方便，很难做到与所使用的信号完全匹配，这一般会使实际的灵敏度有明显的下降，而且在接收机可能接收不同信号时与信号有一定程度的关联。最显著的一点是，大量的灵敏度的指标是以信号功率来计量的，当信号时间长度增加时，同样功率的信号能量随时间正比地增加（如果信号是连续的），而接收机的灵敏度很可能是固定的，或者虽然增加、却没有随时间线性增加那么快。这样，我们经常会面临在面对时间长度比较大的信号时，接收机的灵敏度离上面分析所给出的某种意义的参考有更大的差距。

这里给出一些典型的灵敏度与本节所分析的灵敏度的对比。二相编码通信接收机的灵敏度，没有对应的典型计算公式，但是，有人给出了一种常用的计算，指出比特错误概率与生成该比特的信号能量与背景噪声谱密度比值的关系，这个关系为：

$$P_{\text{br}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{E/2n_0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot dx \quad (5.32)$$

在这个关系式中的 P_{br} 为比特错误率，也就是在式 (5.30) 中的 E_r ；而 E/n_0 就是式 (5.30) 中的 S_w/P_0 。因此，给定比特错误概率 E_r ，对应的信号能量与背景噪声谱密度之比将成为：

$$N_d = 2h^{-1}(E_r) \quad (5.33)$$

这是一个随比特错误概率下降而上升的函数，且从比特错误概率为 0.5（没有信号时）开始永远是大于 1 的。也就是说，由式 (5.32) 所给出的数字通信接收机的灵敏度总是比我们所给出的参考灵敏度要低一些。当 E_r 大约为 1% 时，根据表 5.5，我们知道这个倍数大约是 4.6 倍，或 6.6 分贝。

对于仅仅检测信号存在的一般接收机，错误概率一般为 0.001 或更小。根据表 5.5，给出的灵敏度的信号功率大约是背景噪声谱密度的 3 倍或高 5 分贝。对于这样的接收机的典型的灵敏度，有人给出的公式（当高放增益足够大时）为：

$$S = \sqrt{a N_r K T} \sqrt{2 B_r B_v} \quad (5.34)$$

其中的 S 为灵敏度的信号功率， N_r 为接收机的噪声系数， $K T$ 为玻耳兹曼常量，也就是 $N_r K T$ 等效于我们所说的背景噪声谱密度， B_r 和 B_v 分别为接收机的高频带宽和视频带宽。为了使错误概率基本上为 0.001，需要的识别系数 a 大约为 40，记信号的时间长度为 t ，那么把这个公式写成与式 (5.31) 对应的样子，就是：

$$S_w = P_0 \cdot t \sqrt{a} \sqrt{2B_t B_v} \approx P_0 \cdot 9t \sqrt{B_t B_v} \quad (5.35)$$

两者的比值大约为：

$$N_d \approx 3t \sqrt{B_t B_v} \quad (5.36)$$

它与信号时间长度和接收机的带宽都有关。相对地说，接收机的带宽越大，信号的时间长度越长，我们所得到的接收机灵敏度相对就越低。在信号为单频脉冲包络调制时，如果脉冲宽度为 t ，它的大部分能量集中在一个不大的带宽内。这样，如果我们取接收机的高频带宽为 $2/t$ ，视频带宽为 $1/t$ ，那么，信号的能量大约有 90% 进入接收机，于是 $N_d \approx 3\sqrt{2}/0.9 \approx 4.7$ 。这表明即使是带宽匹配的接收机，实际达到的灵敏度也要比前面给出的参考灵敏度低大约 6.7 分贝。一旦带宽不匹配，灵敏度的下降当然更多。

当没有信号样板时，情况就完全不同了。由于没有样板，我们不可能确切地采用某一种信号的描述方法，将信号的有效能量集中表现在某一维或几维上。这样，在确定的信号描述维上获得信号能量的能力就成了我们能否利用信号的关键，也就成了决定在这个意义下截获信号、获取信号所携带的信息的灵敏度的关键。这里出现的一种最好的状态是，描述信号的方式其实是固定的，不过我们不清楚信号能量集中在这种描述的哪一维上。比如说，信号表现为冲击函数，时域描述就是对所有这样的冲击的一个相当好的描述方式。而如果信号表现为单载频信号，那么，频域描述方式也就是一个相当好的描述方式。在这样的条件下，简单的搜索就可以找到对应的信号维，可以预期，接收机灵敏度应该就是具有样板时的接收机灵敏度。

比较好的一种状态是，描述信号的方式仍然是固定的，虽然信号能量没有集中在这种描述中的某一维上，却仅仅占据数量不多的几维，或者说信号能量以我们未知的方式分布在少数几维上。在这

种情况下,就以这种固定的方式来观察信号,我们获得的效果实际上最多也就是损失信号所占维数那么多的倍数。也就是说,记维数为 m ,在这 m 维内,其中至少有一维,信号能量至少是其总能量的 $1/m$ 。当 m 不大时,我们并不认为这对一个具体的工程应用有太大的影响。比如说,对于侦察者,假设 m 仅仅为 10,那么,通过简单的搜索、对比,这个侦察者虽然不具有信号样板,但是它所可能达到的灵敏度也仅仅比配合的接收者低 10 分贝。

推而广之,最糟糕的情况就是我们根本不清楚信号形式,而且就熟悉的一些固定的描述方式而言,信号能量均散布在数量很大的维内。按照上面的分析,如果仍然记这样的维数为 m ,那么,损失的将可能达到最多 m 倍。我们最熟悉的信号描述方式出现在时域内和频域内,于是可以发现,在时域和频域内均散布的信号,在没有样板时被接收,能够获得的灵敏度一定是相当低的。

但是,不管这样可能获得的灵敏度有多低,它都是以背景噪声为参考的。只要背景噪声足够低,在工程上所可能达到的实际的灵敏度,将仍然是可以使用的。如果把背景噪声看成两部分,一部分来自外部空间,另一部分来自接收机自身,当存在多部接收机时,有没有可能减少这两种噪声中的一部分呢?下面做这样一个模型,当观察信号的时间、带宽乘积足够大时,可能描述信号的维数也相当大,使我们可以假定信号是我们未知的描述方式中的一维,外部噪声是与其正交的另一维,不同接收机的内部噪声又是彼此正交、与前两维也正交的一些维。分别将它们记作 S 、 N_0 和 N_i ,其中 i 从 1 到接收机个数 k 。为了简单,再假设它们的强度分别对应相等,与接收机无关。这样,它们的平均将成为:

$$S + N_0 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k N_i \quad (5.37)$$

计算各接收机的信号与这个平均的点积，将得到：

$$A_i^2 = S^2 + N_0^2 + \frac{1}{k} N_i^2 \quad (5.38)$$

这相当于我们仅仅计量信号加噪声的总能量，不过对应的信号能量为 S ，而噪声的能量为：

$$N^2 = N_0^2 + \frac{1}{k} N_i^2 \quad (5.39)$$

统计地讲，接收机内部所产生的噪声基本被抵消到仅仅剩下 $1/k$ 。

这使得我们对信号的检测成为一种对比信号的谱密度与背景噪声的谱密度的检测，也就是说，由于不知道样板，又假定信号能量在不知道的范围内基本均布，我们能够比较的将仅仅是密度。这样一来，图 5.14 与表 5.5 将依然适用，不过对于信号而言，具有意义的将仅仅是它的谱密度。也就是说，假设错误概率为 1%，只要在某个时间小片段、某个频率小范围内，信号的谱密度高于背景噪声大约 2.3 倍或 3.6 分贝，我们就可以检测出该信号，或者获取与之对应的、所代表的 1 比特的信息。

这个结论具有一般意义。也就是说，即使我们没有信号样板，无法确知信号的合适的描述方式，在任何意义的信号描述中，只要信号的能量密度，比背景噪声高出一定的倍数，我们就可以检测出该信号。对于实际被人们使用的各种信号形式，如果它原本在时域内或频域内就不是均布的，那么，对于信号密度比较高的小区域，我们就很可能可以获得信号以及它所携带的信息。而对于那些在给定的时间范围和频率范围内，确实能量均布的信号，如果可以做一些变换，也就是换一些信号描述方式，使信号能量成为不均匀布的，那么，接收这样的信号的灵敏度也将出现一定的提高。

举例说，对于大部分采用脉冲方式工作的信号，当每一个脉冲都有一定程度的相近时，就可以采用这里所陈述的概念。也就是说，

如果我们仅仅观察包含脉冲的一段时间，用一个脉冲为样板，并看成是信号描述的某一维，其它所有脉冲基本可以认为都很接近这个样板，可能发生的仅仅是在时间位置上的移动（因为不确定脉冲到达的时间）。这样一来，如果用包含脉冲的一段时间为基础，对这样的不同时间段做相关，将会发现两段时间的信号会出现一个相关峰，指示在所采用的时间内，两个脉冲的时间间隔。如果描述这样一段肯定会包含一个脉冲的信号的维数 n 可能比较大，噪声的能量将分布在所有的维上，而信号的能量将根据其自相关函数特性的好坏，仅仅占据其中的一维或数量不多的几维。于是，用这样的观点看，我们尽管仍然表述不出信号到底应该用什么方式描述才好，但是却已经使用了某一个描述，使得在若干维上，信号相对地于噪声的密度有了明显地提高。当这个差距够上面所说的 2.3 倍或更大时，就能够在一定意义上检测出信号，或者提取信号中所携带的信息。

假设信号就是随机噪声，脉冲宽度为 200 点，重复间隔无规律，从 1000 点到 4000 点任取。取这样的信号长度为 40000 点的一段，如图 5.15 的左图所示。在有噪声时，按脉冲时段内的平均功率计，信噪比为 -5 分贝，含噪声的信号将如图 5.15 的右图所示。可以看到，从时域上看，信号完全被掩盖在噪声中了，无法检测。

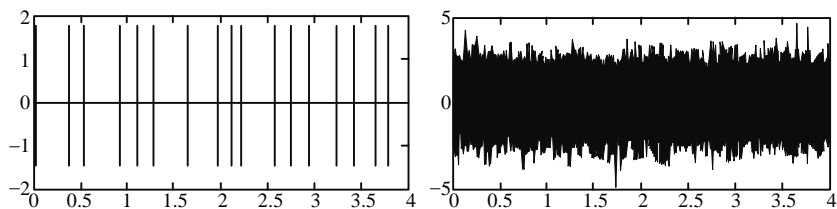


图 5.15 无规则重复的宽频带脉冲信号

按照上述原理做相关处理，因为事先不知道脉冲宽度和重复周期，我们只能试探着取某一段含噪的信号为样板。对这样的长度为 40000 点的信号做相关，在样板包含一个完整信号脉冲时，结果应

该能指出信号脉冲重复的情况，并检测出信号的存在。图 5.16 为用一个样板长度为 400 点时的一个结果。图中，用一条粗的横线指示可能采取的判定门限。可以看到，在这样的条件下，信号的存在和各脉冲的时间位置是非常明显的，而且与原信号没有任何差异，尽管在处理以后，我们仍然不知道信号是什么样子的，也不知道它的脉宽大概是多少。需要特别提醒的是，我们没有简单地用整个信号做自相关。

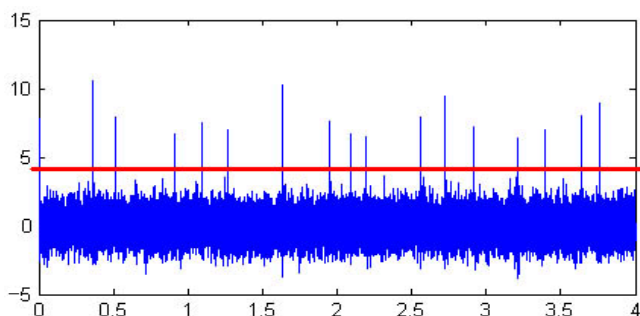


图 5.16 无规则重复的特别相关结果

再举例说，线性调频的脉冲信号，其包络是矩形的，频谱也是矩形的。也就是说，在脉冲时间内，其能量是基本均匀分布的，在调频范围内，其能量也是基本均匀分布的。如果我们未知这样的信号，对它的接收灵敏度将是比较低的。但是，如果我们对信号做 **Rdon-Wigner** 变换，相当于对信号做时频变换后又沿着直线方向给予一定的积累，其效果，不同方向积累是不同的，当这个方向与线性调频的斜率匹配时，结果出现一定意义的峰值。于是，在不同的方向上，我们能够观察到的相当于信号噪声强度的比值就不相同。有比值大的情况出现，就可以是我们检测信号、获得信号所携带的信息的灵敏度有某种意义的提高。

5.7 长时间相关积累的考虑

根据本书的论述,在利用信号携带信息的使用过程中,经常会面对的一个处理过程是对信号做相关积累。相关积累的某一个输出值是两个信号的一个点积,在离散计算的条件下,如果信号由 n 点表示,将由 n 点的乘法和加法构成。结果,整个相关积累的计算,无非是这样的计算的倍数。如果需要输出 m 点,结果将需要 mn 点乘法和 mn 点加法。如果要计算的是一个具体的信号对 k 个不同的样板的相关,那么,将需要 kmn 点乘法和 kmn 点加法。当信号的时间、带宽乘积很大时,也就是描述信号所使用的点数 n 很大时,这样的总计算量也变得十分巨大。在工程实现中,这样所出现的巨大的计算量往往成为实际使用的一个障碍。因此,人们总是希望找到一些原理,使各种计算能够得以简化,特别是在一些具有时间限制的应用中,这样的简化将使应用由非实时走向实时,发生质的变化。

用数学式来描述,我们面对的问题是,对于两个已知的函数 $f(t)$ 和 $g(t)$,其中 f 为所接收到的信号, g 为已知的信号样板,我们需要计算的是:

$$H(\tau, k) = \int f(t)g(k(t - \tau)) \cdot dt \quad (5.40)$$

其中出现的一个比例因子 k ,当信号具有一定的频带宽度,且与其中心频率相比不是很大时,可以看成是信号的频谱发生了一定的移动,在把比例因子换成频率移动、引入复数后可以写成:

$$H(\tau, \omega) = \int f(t)g(t - \tau)\exp(j\omega t) \cdot dt \quad (5.41)$$

严格意义的这样的两维运算需要大量的计算量,本节的讨论试图给出一些实际可用的节省计算量的方法。而且在工程实际中,我们面临的并不是积分,更不是积分界无限的积分,而仅仅是跨度有限的离散点的叠加运算。不过,讨论节约计算的意义所以存在,肯定是

指信号时间比较长，也就是 n 不是很小的情况。

首先，看 $\omega=0$ 的情况，也就是只有一维的最简单的情况。幸运的是，在考虑函数的傅里叶变换时，有这样一个性质：两个函数的卷积的傅里叶变换，是它们各自傅里叶变换的乘积。于是，这样的相关运算，实际就是卷积，可以转化为先对两个函数做傅里叶变换，在完成对应的相乘后，再做傅里叶反变换。对于离散信号，这同样是成立的。如果这样计算，实际上计算量并没有发生什么实质性的变化。可喜的是，在做函数的傅里叶变换或反变换时，我们可以采用快速变换的算法，它将节省大量的计算。

需要说明的是，这样的快速运算给出的结果，仅仅适合于周期信号。也就是说，当积累的周期为 T 时，信号是以 T 为周期的。我们把这样的结果叫做循环卷积。在这样的条件下，如果截取了 $f(t)$ 的时间跨度为 T 的一段，得到的将是 $H(\tau)$ 的时间跨度为 T 的一段， $g(t)$ 将是 T 为周期重复的，其时间长度被宽展成 $2T$ 。实际的情况是，我们所面对的信号很可能根本就没有周期。在这种情况下，我们将强制性地 $g(t)$ 按周期 T 扩展成周期性的。结果，所使用的 $f(t)$ 的时间跨度和 $H(\tau)$ 的时间跨度的总和只能为 T 。如果需要的 $H(\tau)$ 的时间跨度为 ΔT ，可以使用的 $f(t)$ 的时间跨度将下降到只有 $T-\Delta T$ 。为了不使剩余部分的函数起作用，在计算时要把 $f(t)$ 的属于时间范围 $T-\Delta T$ 以外的部分都设成为零。图 5.17 清楚地反映了这个情况。

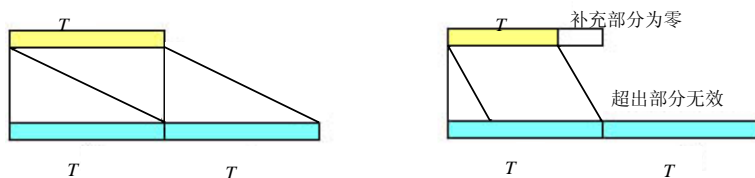


图 5.17 循环卷积及其对非周期函数的有效部分

当整个待积累的信号时间比较长时，由于 T 很大，导致 n 很大。结果，不但为了获得完整的信号，需要等待很长的时间，而且要做

的傅里叶变换也变得很大，包括运算耗时的运算代价增加。为此，将式 5.41 所给出的积分进行分段，多段积分的总和当然是各分段积分的和。用公式表示，就是：

$$H(\tau, 0) = \int_{T_1+T_2+\dots} f(t)g(t-\tau) \cdot dt = \sum_i \int_{T_i} f(t)g(t-\tau) \cdot dt \quad (5.42)$$

于是，我们就可以用相对小一点的 T_i 做相关处理，每一段 T_i 得到的都是范围为 ΔT 的时间差范围。这些分段之间的时间间隔则为 $T_i - \Delta T$ 。比如说，如果这个时间差范围为 200 微秒，当我们把每一段之间的相邻间隔时间取成 1 毫秒时，所使用的参考信号的时间长度也就是 1.2 毫秒，至于总的积累时间，可以是 1 毫秒的任意倍数，原则上可以没有上限。

我们真正关注的是具有频移时的相关结果，对每一个不同的频移，都可以通过以同一个样板经过不同频移后的结果为样板，重复计算得到所有的结果。但是这样做的计算量相对地比较大，我们试图减少所需要的计算量。首先观察角频 ω 比较小时的状态，式 (5.41) 可以被写成为：

$$H(\tau, \omega) = \sum_i \int_{T_i} f(t)g(t-\tau)\exp(j\omega t) \cdot dt \approx \sum_i \exp(j\omega t_i) \int_{T_i} f(t)g(t-\tau) \cdot dt \quad (5.43)$$

其中 t_i 为每一段 T_i 的中间值。如果每一小段时间区间是等间隔的，各 ωt_i 就是等间隔的，这样一个表达式几乎就是说， $H(\tau, \omega)$ 是对应的每一小段相关积分的傅里叶变换。因此，我们的计算就可以近似为这样：用等间隔将总时间分成若干段，假设为 m_1 段，对这样的每一小段做相关，得到具有不同时延结果的一批值，假设为 m_2 点。然后，对同一个时延结果，再做傅里叶变换，得到对应的 m_1 点不同频率上的值。这样的结果，是一个时延为 m_2 点、频移为 m_1 点的二维的结果。

如果原始数据的采样周期为 t_s ，那么，时延的分辨率也就是 t_s ，

而 m_2 点时延的总跨度将为 $t_d = m_2 t_s$ 。如果每一小段的时间间隔为 t_d ，对于 m_1 段，也就是计算所用的信号的总的的时间跨度为 $m_1 t_d$ ，那么，计算所得到的总的频移的不模糊跨度就是 $f_a = 1/t_d$ ，而频移的分辨率将可以达到 $1/m_1 t_d$ 。注意，我们并没有要求所使用的每一小段信号是否相同，如果它们相同，超过上述时间跨度 $m_2 t_s$ 时，在时延方面就将面临模糊。我们也并没有要求信号在一小段时间内都是非零的，如果信号是脉冲制的，将出现在计算的积分中，有相当一段积分函数的值为零的局面，这不但可能节约计算量，而且使我们采用将指数函数提到积分符号外面来的近似更加合理。或者说，在导出上面的表示时假设了角频 ω 比较小这样的条件，在信号函数表现为脉冲制时，这样的条件可以大大放宽，变成最大角频与信号脉宽的乘积为一小数，不使其指数发生明显的变化。

上面的叙述表明，这样的算法的时间分辨率取决于对信号的采样周期，也就是信号的频带宽度，而频移分辨率取决于信号的总的的时间长度。另一方面，根据前面对快速算法的解释，可以知道，可以计算的信号时延跨度必然小于小段信号的时间长度。即使信号是完全周期性的，并且按它的周期将信号分成小段，那么，可以计算得到的最大时延跨度也就是小段信号的时间长度。也就是说，一定有：

$$t_d \cdots t_a = m_2 \cdot t_s \quad (5.44)$$

而这个式子可以被写成：

$$t_a \cdot f_a \ll 1 \quad (5.45)$$

也就是说，采用这样的计算，适用的时延跨度和频移跨度的乘积必定小于 1。

如果信号是非周期的，不模糊的时延跨度应该可以任意大，但是，如果我们采用上面所述的计算方法，一次计算所得到的时延跨

度和频移跨度的乘积必定小于 1。而且,按图 5.17 的解释,如果信号是非周期的,每小段计算所可能获得的时延范围将小于所采用的小段的时间跨度。如果按这个比值为 1/2 计,可以得到的时延跨度和频移跨度的乘积将就是 1/2。将信号整体在时间位置上移动一个这样的时延跨度后再计算,又可以得到一个相关结果。它们的总和,时延跨度和频移跨度的乘积将提高到原来两倍。于是,通过多次这样的计算,所可能达到的时延跨度和频移跨度的乘积范围应该是没有什么限制的。不过,为了满足使 ω_{\max} 与 t_d 的乘积足够小和 t_a 与 f_a 的乘积满足使用要求,所需要付出的代价是计算量的增加。

在工程实际中,还可能出现这样的情况,由于积累时间比较长,信号的时间伸缩或频率移动引入了时延的变化。在这种情况下,式 (5.40) 或式 (5.41) 已经不能准确地反映问题本来的面貌。它的主要表现是,对于 $\omega=0$ 的情况,在不同的时段看,信号与参考的时间延迟是一个定数,但是在 $\omega \neq 0$ 时,信号与参考的时间延迟是随时间变化的。对于所采用的分段计算方式,一旦这个时间延迟超过了计算时延的分辨率,这种长时间积累的意义就无法体现在计算中了。于是,我们需要引入必要的修正。显然,时延的变化量将正比于积累时间的长度和频移的大小。如果记积累的具体时间为 t , 频移大小为 ω , 那么所引入的时延变化量将是:

$$\Delta\tau = k \cdot t \cdot \omega \quad (5.46)$$

当时间分辨率为 t_s 时,时延可能的修正量的大小只能是这个 t_s 的整数倍 m , 为:

$$m = \text{rd}\left(\frac{k \cdot t \cdot \omega}{t_s}\right) = \text{rd}\left(\frac{t \cdot \omega}{k_t}\right) \quad (5.47)$$

其中函数 rd 的意义是取最接近的整数。由于实际计算都是离散的,记 $t = n_d \cdot t_d$, $\omega = n_\omega \cdot \Delta_\omega$, 就可以得到:

$$m = \text{rd}\left(\frac{n_d \cdot n_\omega}{k_n}\right) \quad (5.48)$$

这个修正量作为 n_d 和 n_ω 的函数，如图 5.18 所示，图中画出的是 m 作为整数分界的地方。

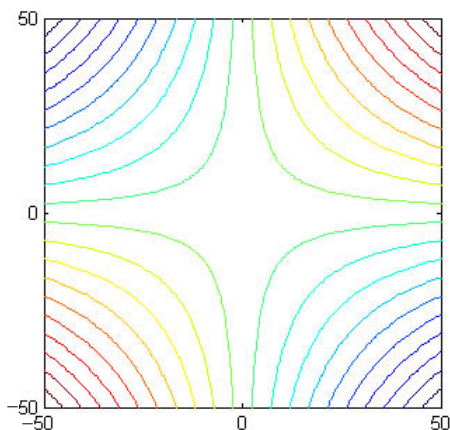


图 5.18 延时修正量为时间段和频移的函数

只要 n_d 和 n_ω 的乘积足够小， m 总为零，我们是不需要做任何修正的。但是，只要这个乘积使 m 不为零，在利用式 (5.43) 进行计算时，就需要分段进行。利用同一个时延位置的值做傅里叶变换，得到的在这个时延上的对应的各频移值，只有频移小的部分，也就是仍然满足 m 为零的部分，结果才是正确的。对于频移略大一点的情况，将需要修正，而且这个修正量不但是小段的段序号或位置的函数，也是频移的函数。这将使实际进行的计算量迅速增加，在工程上难以接受。而且读者还可以从图 5.18 看到，所指示的边界不是与图的坐标轴平行的，其范围在 n_d 或 n_ω 比较大时越来越小。因此，相对比较合理的办法是，先将样板做移频或伸缩的复制，使用不同的样板进行计算，而且尽量使用图 5.18 中间的那一部分。要么使得在一次计算中，有效的频移范围足够小， m 总是零；要么限制积累

时间，在计算得到结果以后，再进行考虑到延时错位的叠加。

举一个例子说明这样计算的概念。假设发射一个信号，反射目标向我们接近的速度为每秒 300 米，积累的时间跨度为 1 秒。于是，如果我们用原信号样本为参考计算，在 1 秒始与 1 秒末，反射的时延差异将达到 2 微秒。如果时间分辨率为 50 纳秒，这样的积累将跨越 20 个单元，是无法完成的。如果我们实现复制样板，并且是按照每 1 秒要压缩 2 微秒制作的话，那么在观察反射信号时，就如同时延没有发生变化一样，上面所采用的分段计算将可以实现有效的叠加。假设实际的目标接近速度并不正好是每秒 300 米，而是每秒 290 米，那么，对于修正后的样本，还有每秒 10 米的差异。但是，这个差异在积累的 1 秒时间内，所引入的时间差的跨度将只有 30 纳秒，不足一个分辨率单元的时间跨度，基本不影响积累的进行。

如果在实施中已经按时间分段进行了积累，然后想把几个不同时间跨度的积累再叠加起来，那么叠加时就需要根据频移的大小有所区别对待了。对于小的频移，可以采用同样位置的结果进行叠加，而对于大的频移，采用错位的叠加，而错位的位数就应该是式(5.48)所计算得到的那个整数。

超长时间的积累可能有许多不同的方式，但是，这里所提出的原则方法应该说是比较简单的一种。

5.8 多次融合问题

当我们用信号携带信息时，可以有两种不同的方式，一种是一次性地携带信息，一种是反复地携带信息，而它们的基本差别仅仅在于前后携带的信息是否有关联。某一段信号携带某个信息，后面再出现的信号携带完全独立的信息，相互没有关系，就是我们所说的一次性地携带信息。显然，在这样的情况下，问题是相对独立、封闭的。在某种具体的方式下、要以某种可靠的概率完成这样的携带信息的使命，所要求使用的信号能量将是确定的。而反复携带信

息的情况不是这样，我们反复使用信号，它们携带同样的信息，或者前后有关联的信息。这种方式一般发生在信号是不断被发射的情况下，信息是被加载到信号上去、前后固定或有关联的。对于这种情况，就相对的一次而言，我们很可能使用比较小的信号能量，使得能够携带的信息比较少，或者正确获取所携带的信息的概率比较低；但是，随着次数的递增，携带信息的信号所付出的能量逐步增加，漏缺的信息被逐步弥补上，在经过了一段时间以后，从总体来说，仍然携带了一定总量的信息。本节就这个问题，展开简单的讨论。

反复携带信息的具体情况可能有很多不同的状态，在本节中仅仅分析两种典型的情况。第一种是由测量获得一定的精度，第二种是由信号给出一定的判断，经过多次测量，精度可能提高，判断可能更加准确。

有限的信号能量反映为有限的信噪比，使精度在某一个具体的水平上，代表一定的信息量。多次利用信号，反复测量，精度将有所提高，也就是获取的信息量有所增加。如果对一个精确量反复进行独立的测量，结果将接近为正态分布，标准差将以次数 n 的平方根的比值缩小。于是根据信息的定义可以发现，多次测量结果的信息量将增加 $\frac{1}{2} \log_2(n)$ 比特。这个结论给人一个错觉，似乎只要无休止地测量下去，就有可能获得无穷大的信息量。

为此，必须考虑对象物理量实际上不是一个绝对精确的量，假设它也呈正态分布，标准差为 σ_0 ，那么，根据数理统计的原理，多次测量结果的标准差将为：

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + n \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2} \quad (5.49)$$

根据定义，由于次数的增加所增加获得的信息量为：

$$X_m = \frac{1}{2} [\log_2(n) - \log_2(1 + n(\frac{\sigma_0}{\sigma})^2)] \quad (5.50)$$

这个增加量随 n 变化的曲线如图 5.19 所示，其中使用了 σ_0/σ 为参数。只有当这个参数的平方乘以 n 显然比 1 小时，信息量的增加是测量次数的对数函数。当这个参数的平方乘以 n 比较大时，多次测量所获得的信息增量将趋于一个常数，它是 $\log_2(\frac{\sigma}{\sigma_0})$ 。如果单次测量的精度比较高，这可能是一个很小的量值。根据图 5.19 的结果，可以看到，多次测量的结果，在一般情况下，仅仅能够给出额外的大约 5 到 8 个比特的信息量。但是，我们也可以看到，不论在什么参数的条件下，当测量次数在大约 20 次以下时，测量次数的增加将明显地带来信息量的增加。

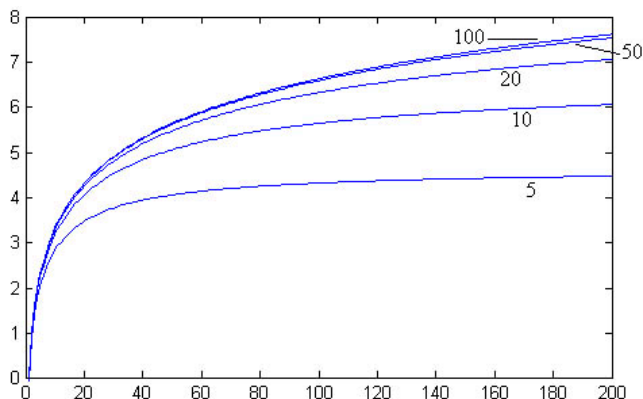


图 5.19 多次测量的信息量增量

假设我们根据一次侦察结果判定目标为某个类型的信号，同时给出一个可信度的度量，比如 80%。对于目标是或不是这某个类型的信号，最大的信息量只有 1 比特，当我们绝对肯定时，余下的信息熵为 0，我们获得了全部的这个 1 比特信息。而当只能肯定某个百分数 p 时，余下的信息熵还有 $-p \cdot \log_2(p) - (1-p) \cdot \log_2(1-p)$ ，把

两者的差作为我们所获得的信息量，那么这份信息量将为 $1 + p \cdot \log_2(p) + (1-p) \cdot \log_2(1-p)$ 。如果进行两次测量，可以把问题的模型设置成这样：假设第一次的可信度为 p_1 ，第二次的可信度为 p_2 ，由于我们很少关于这两次测量之间相关性的信息，我们将认为，概率为 $p_1 p_2$ 的部分，对判断的结论将是肯定；概率为 $(1-p_1)(1-p_2)$ 的部分，对判断的结论将是否定，而对余下的概率为 $p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2$ 的部分，由于两次测量的结论彼此矛盾，没有明确的结论。因此，我们将认为合成的结果，有 $\frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)}$ 的概率，所侦察到的目标为我们所判定的某类型，而余下的还有 $\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)}$ 的概率，所侦察到的目标不是我们所判定的某类型。

这里，可信度的提高将伴随着所获取的信息量而增加。很显然，在所给出的模型下，可信度不是简单地相乘，信息量更不是简单地相加。如果把与结果的可信度所对应的总信息量的计算公式写出来，它应该是：

$$H_t = 1 + \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)} \cdot \log_2\left(\frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)}\right) + \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)} \cdot \log_2\left(\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)}\right) \quad (5.51)$$

这里似乎得不到简单的规律。但是，如果我们观察信息函数的变化斜率，对前面所给出的曲线函数 $1 + p \cdot \log_2(p) + (1-p) \cdot \log_2(1-p)$ 求导，将得到：

$$H' = \log_2(p) - \log_2(1-p) = \log_2\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad (5.52)$$

对于两次测量合成的结果：

$$H' = \log_2\left(\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}\right) = \log_2\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right) + \log_2\left(\frac{p_2}{1-p_2}\right) \quad (5.53)$$

现在，这个关系变得相当简单。如果我们画出信息量的变化率与可信度的关系曲线，它是如图 5.20 那样的一条单调曲线。那么，根据每一次的可信度，可以查出各次的信息量变化率，根据式 (5.53)，结果的这个变化率将是两次变化率的简单的和，有了合成的变化率，我们又可以反查回去，获得合成的可信度。

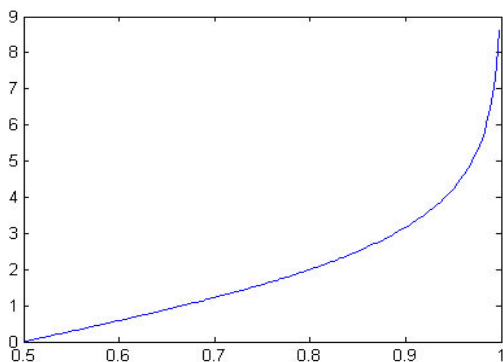


图 5.20 信息递增的变化率与可信度之间的函数关系

根据图 5.20，可以看到，这个曲线在 $p=0.5$ 时给出的斜率值为 0，在 $p<0.8$ 时几乎是线性的，而后却具有明显的非线性。也就是说，当引入信息的概率、用上述模型进行推算时，对于可信度不大时，可以简单地把它扣去 0.5，然后相加后再增加 0.5，只要这个结果不大于 0.8，它就是合成的结果；由于我们最后得到的信息量不可能超过 1 比特，或者可信度不可能大于 100%，因此，在各次可信度较高时，这样的简单相加将不再合适。

图 5.20 的状态还告诉我们，当这个信息量的变化率在可信度小于 0.8 时，比如 0.6 和 0.7 之间，大约为 1；当这个信息量的变化率在可信度为略大于 0.9 时，大约已经为 3.5；而当信息量的变化率大

于 8 或 9 时,可信度已经接近 100%,再加大这个变化率,效果已经很小。因此,对于较低可信度的侦察结果,如果有大约 8、9 次侦察,将可以合成一个可信度比较高的结果;而对于可信度已经超过 0.9 的侦察,3 次已经可以相当肯定所得到的结论,再增加次数,对于结论的可靠性或所获得的信息总量的增加,将不会有什么贡献。

作者在这里仅仅分析了两个简单的特例,但是它们反映了一个一般性的规律,反复使用信号携带信息,在很多情况下,所获得的信息量往往并不按次数的增加而线性地增加,我们更多获得的,可能是对所得到的答案的确定性的增加(尽管它在另一个意义上也表现为是信息量的增加)。对多次反复所进行的融合,一般都可以获得这种确定性的增加。

5.9 关于信号波形安全

在使用信号携带信息时,人们最初并没有考虑信息的安全问题。但是,随着应用的增加和技术的发展,使用者开始意识到需要考虑安全问题。对于大部分应用,信息不是直接表现在信号上的,而仅仅是被信号携带,所谓安全,就是不希望非配合者可以用相对比较小的代价获取所携带的信息或破坏配合者正常地获取对应的信息。前面已经反复提到,所谓信息是在获取信号前后的对比中得到的,而要较好地获取信号所携带的信息,事先具有信号样板是最基本的。有信号样板与没有信号样板,接收信号的灵敏度也会有明显的差别。如果出现干扰,不管是人为的还是无意的,我们感兴趣的仅仅是干扰信号在有信号所表现的特定的维上的能量的分量。因此,考虑信息安全问题,除了常规意义的所谓安全以外,首先要考虑的是所采用的信号波形是否安全的问题。而信号波形的安全问题,又可以简单理解为信号样板能否被非配合者获取的问题。或者更一般地说,信号样板在描述信号的高维空间中占有某一维,如果

我们能够获取一个维数不大的子空间，信号样板就在这个子空间内，那么在这样一个小的子空间内分析时，将比较容易获得信号能量相对集中的维，我们把这样一种状态叫做基本获取信号样板。注意，在这样的条件下，我们仍然可能无法给出哪怕看起来比较接近信号样板的一个具体波形。但是无论如何，信号波形的安全问题就可以被理解为非配合者能否以相对小的代价基本获取信号样板。由于对“基本”两字没有定量的计量，对于付出代价“小”这样的说法也无法定量计量，因此，我们所讨论的信号波形安全问题是一个模糊问题，不存在绝对的安全或不安全。能够陈述的，仅仅是比较而言的、模糊的安全或不安全。

很显然，如果信号的时间带宽乘积非常小，描述这样的信号所必须的维数本来也就很少，可以认为非配合者比较容易基本获取信号样板。因此，时间带宽乘积小的信号就一定不是安全的。但是，这并不等价于时间带宽乘积大的信号就一定是安全的。

常规的对信号的描述是在时域内和频域内的，因此，如果信号样板在时域内或频域内分布非常集中，具有明显的峰值，这样的信号就是不安全的。因为利用时域或频域的描述方式，包括峰值的数量不多的若干维就可能包含这样的信号的大部分能量，我们就已经基本获取了信号的样板。常规的通信信号具有固定的载频和调制方式，应该说就属于这样的不安全信号。传统的雷达信号，哪怕是新体制相参雷达，参数非常稳定，在描述它们的时候，也仅仅需要利用在时域或频域内维数不同的若干维，因此，它们也同样是不安全的。于是，安全的信号不但需要在时域和频域上的描述都是宽的，而且都不能有能量集中的峰。但是，它的反面同样也不一定成立，也就是说，我们无法确认，宽时间跨度、宽频率范围的信号就一定是安全的。

如果信号具有简单的重复规律，那么，通过自相关，很容易获得这个重复周期。接下来，通过反复叠加，我们以消耗时间为代价，

就可以提纯信号样板。即使无法确切地获得信号样板,也可以按上面所定义的方式基本获取信号样板。有些重复规律不像我们设想的是一模一样地重复,比如简单的二相编码,信号具有严格等长的很多单元,不是相同就是在正负极性颠倒后相同。对于这样的信号,如果正负极性随机,而且统计地一样多,那么简单地自相关基本没有峰值出现。但是,如果我们截取一小段这样的信号,在试探过程中得到一个合适的、比单元长度略长的跨度,将可以发现信号与这样的小段样板的相关会明显地出现一些位于周期位置上的若干峰。如果将相关结果取绝对值,这些峰将是严格周期的。如果将这个结果下限幅后再相关,相关峰就非常明显了。因此,简单重复的信号,在一定意义上讲也将是不安全的。

至此,我们虽然还没有非常明确,安全的信号波形必须是什么样的,但是至少可以理解,就携带信息的观点看,一个合适的信号波形,除了满足本身使命的要求外,只要没有实现上的制约,或者反过来说,只要技术和造价上允许,它还应该是宽时间跨度、宽频带范围、没有简单重复规律的。显然,一个安全信号至少看起来有点像一个具有比较宽的频谱、接近连续的时间表现,在比较长的时间内看不出简单地重复,或者说看起来像一个这样意义的噪声。我们简单地讨论过噪声通信,还没有讨论噪声雷达,但是,根据本节的观点,应该可以接受噪声通信和噪声雷达可以是一种合理的设想。即使这样的体制在信号处理和具体实现上可能会有更大的复杂性,但是它们在信号安全的意义上来说,至少比目前一般意义的通信和雷达要好。

从信号波形安全的意义出发,或许会对信号提出某些要求。对于在限定时间内必须传递一定比特数的信息的应用,单元信号的时间长度将被限定,于是,使描述信号所在空间的维数足够大的唯一办法是增加信号带宽。从这个角度看,对于有安全要求的应用,电子设备的接收机硬件必须适应宽频带的要求,宽带信号处理也将是

基本的、必需的。而对于那些对信息的比特率并无严格要求的应用，增加信号的时间长度可以使描述信号所在空间的维数也变得足够大。从这个角度看，对于有安全要求的应用，使用非周期的信号也将是基本的和必需的。以这样的观点来看常规的通信和雷达时，或许我们会问，继续使用具有某个载频的信号，使用过程中有某种规律的重复，乃至信号采用脉冲制的方式，到底还会延续多长的时间？当在工程实现中，由于采用合适的数字技术，已经可以没有必要被现有的常规约束时，或许情况将发生变化。到那个时候，我们将不再有传统意义上的各种设备，有的只是信息的携带、传递、截获、提取设备而已，它们所使用的信号将很难用几个参数来描述。